Probeklausur

In der echten Klausur werden Sie ca. 2 Stunden haben und über keine Hilfsmittel verfügen.

1. Wissensfragen

i. Wie lauten die Newton'schen Gesetze?

ii. Wie ist die Poisson-Klammer zweier Phasenraumfunktionen definiert?

iii. Wie lauten die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen...

a) ohne Poisson-Klammer?

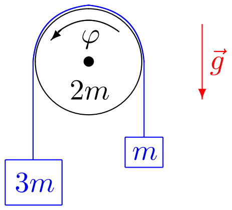
b) mit Poisson-Klammern?

iv. Welche Folgen hat die Invarianz der Wirkung für ein physikalisches Problem unter zeitlicher und räumlicher Transformation?

v. Wie lauten die Coriolis- und die Zentrifugalkraft auf einen Massenpunkt (Masse m), der sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ relativ zu einem rotierenden Bezugssystem (Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$) bewegt?

2. Atwood'sche Fallmaschine

Zwei Gewichte (Massen m und $3m$) im homogenen Erdschwerefeld $\vec{g}$ seien mit einer masselosen Schnur über eine drehbare zylinderförmige Rolle (Radius R, homogen verteilte Masse $2m$) verbunden.



i. Zeigen Sie, dass das Trägheitsmoment der Rolle bezüglich ihrer Drehachse $I = mR^2$ ist.

ii. Wählen Sie den Rotationswinkel φ der Rolle als verallgemeinerte Koordinate und stellen Sie die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichung auf. Welche Beschleunigung erfährt die Masse m?

3. Phasenraumtrajektorie der gedämpften Schwingung

Betrachten Sie einen eindimensionalen, entlang der x-Achse schwingenden, gedämpften harmonischen Oszillator. Erklären Sie (mathematisch), wie seine Trajektorie in dem von x und p aufgespannten Phasenraum aussieht, mit p dem zu x konjugierten Impuls.

4. Kepler-Problem

Ein Massenpunkt (Masse m) bewege sich in Zentralpotential $V(\vec{r}) = -\dfrac{\alpha}{|\vec{r}|}$ mit α einer Konstanten.

i. Erklären Sie, warum die Bewegung in einer Ebene stattfindet.
Seien x, y kartesische Koordinaten in dieser Ebene und $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ die zugehörigen Basisvektoren.

ii. Die Position des Massenpunkts sei $\vec{x}(t) = r(t)\,\vec{e}_r(t)$ mit $\vec{e}_r(t)$ dem instantanen Einheitsvektor in Radialrichtung. Die Bahnkurve wird mit dem Abstand $r(t)$ vom Kraftzentrum und dem Winkel $\varphi(t)$ relativ zu einer Bezugsrichtung parametrisiert, wobei

$$\vec{e}_r(t) = \cos\varphi(t)\,\vec{e}_x + \sin\varphi(t)\,\vec{e}_y.$$

Sei $\vec{e}_\varphi(t) = -\sin\varphi(t)\,\vec{e}_x + \cos\varphi(t)\,\vec{e}_y$.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}(t)$ des Massenpunktes, ausgedrückt durch $r(t)$, $\varphi(t)$ (und ihre Ableitungen) und die Vektoren $\vec{e}_r(t)$, $\vec{e}_\varphi(t)$.

b) Geben Sie den Betrag $\ell \equiv |\vec{L}|$ des Drehimpulses des Massenpunktes, ausgedrückt durch die Masse m und die Funktionen $r(t)$, $\varphi(t)$ und ihre Ableitungen.

iii. Das Problem der Zeitabhängigkeiten $r(t)$, $\varphi(t)$ ist eigentlich zu kompliziert. Stattdessen betrachtet man die Abhängigkeit $r(\varphi)$ des Abstands r von dem Winkel φ. Dementsprechend werden die Vektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ Funktionen von φ.[1] Sei $u(\varphi) \equiv 1/r(\varphi)$. Dann kann man schreiben

$$\vec{x}(\varphi) = r(\varphi)\,\vec{e}_r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)}\,\vec{e}_r(\varphi).$$

Ableitungen nach φ werden mit $'$ bezeichnet.

a) Drücken Sie $\dot{\varphi}(t)$ durch m, ℓ und $u(\varphi)$ aus.

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}(t)$:
- erstens ausgedrückt durch $r(\varphi)$, $r'(\varphi)$, $\dot{\varphi}(t)$ und die Vektoren $\vec{e}_r(\varphi)$, $\vec{e}_\varphi(\varphi)$;
- dann ausgedrückt durch $u(\varphi)$, $u'(\varphi)$, $\dot{\varphi}(t)$ und die Vektoren $\vec{e}_r(\varphi)$, $\vec{e}_\varphi(\varphi)$;
- schließlich ausgedrückt durch m, ℓ, $u(\varphi)$, $u'(\varphi)$ und die Vektoren $\vec{e}_r(\varphi)$, $\vec{e}_\varphi(\varphi)$.

Hinweis: Hier in der folgenden Frage können einige der angegebenen Funktionen oder Vektoren nicht in den gesuchten Ausdrücken auftreten.

c) Leiten Sie daraus die Beschleunigung $\ddot{\vec{x}}(t)$, ausgedrückt durch m, ℓ, $u(\varphi)$, $u'(\varphi)$, $u''(\varphi)$ und die Vektoren $\vec{e}_r(\varphi)$, $\vec{e}_\varphi(\varphi)$ ab. Was ist die Tangentialbeschleunigung des Massenpunktes, d.h. die Komponente von $\ddot{\vec{x}}(t)$ entlang $\vec{e}_\varphi$? Warum könnten Sie dieses Ergebnis vom Anfang an raten?

iv. Das Bezugssystem, in welchem das Kraftzentrum ruht, sei ein Inertialsystem.

a) Drücken Sie die Kraft auf den Massenpunkt durch $u(\varphi)$ und andere relevante Größen aus.

b) Wie lautet das zweite Newton'sche Gesetz für den Massenpunkt? Zeigen Sie, dass sich die Bewegungsgleichung für $u(\varphi) \neq 0$ als

$$u''(\varphi) + u(\varphi) = \frac{\alpha m}{\ell^2} \tag{1}$$

umschreiben lässt.

c) Sei $p \equiv \ell^2/\alpha m$. Geben Sie erstens die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) an, dann die Lösung mit $u(\varphi\!=\!0) = (1+\epsilon)/p$, wobei $\epsilon \geq 0$. Wie lautet $r(\varphi)$? Wie sieht die Lösung $r(\varphi)$ für $p > 0$ und $\epsilon < 1$ aus?

v. Drücken Sie noch die kinetische Energie des Massenpunktes durch m, ℓ, $u(\varphi)$ und $u'(\varphi)$ aus.

[1] Hier wird angenommen, dass die Funktion $\varphi(t)$ zumindest stückweise invertiert werden kann, was $t(\varphi)$ ergibt; dann ist $r(\varphi) = r\big(t(\varphi)\big)$, usw.