

Übung Nr. 9

Diskussionsthemen:

- Was sind Lorentz-Transformationen? Vierervektoren und -tensoren? Kennen Sie Beispiele davon?
- Wie lautet die Lagrange-Funktion eines freien relativistischen Teilchens?

*30. Längenkontraktion

Wie werden Längenmessungen durchgeführt? Hierzu legt man einen Maßstab auf die zu messende Strecke und liest *gleichzeitig* die Positionen der Endpunkte ab. In Bezugssystemen \mathcal{B} und \mathcal{B}' werden identische ruhende Maßstäbe der Länge $l = l'$ verwendet, d.h. wenn sich beide Systeme relativ zueinander in Ruhe befinden sind sie gleich lang. Nun soll sich das System \mathcal{B}' relativ zu \mathcal{B} mit der Geschwindigkeit $\vec{u} = u \vec{e}_1$ entlang der x^1 -Achse bewegen. Die Koordinatenachsen in beiden Bezugssystemen sind parallel zueinander.

Erfolgt die Bewegung parallel zu den Maßstäben, so misst ein Beobachter in Ruhe bezüglich \mathcal{B} , dass der relativ zu ihm bewegte Stab auf die Länge

$$l_{\parallel} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} l'_{\parallel} \quad (1)$$

verkürzt ist. Sind die Maßstäbe orthogonal zur Bewegungsrichtung, z.B. beide entlang der x^2 -Richtung (die gleich der x^2 -Richtung in \mathcal{B}' ist), so stimmen beide Längen überein, $l_{\perp} = l'_{\perp}$. Dabei stellen die gestrichelten bzw. nicht-gestrichelten Größen die Längen dar, die durch einen in \mathcal{B}' bzw. \mathcal{B} ruhenden Beobachter gemessen werden.

- i. Beweisen Sie diese Aussagen, indem Sie die Lorentz-Transformation zwischen beiden System betrachten.
- ii. Ein in \mathcal{B}' ruhender Stab der Ruhelänge l' schließt mit der x^1 -Achse einen Winkel θ' ein. Welche Stablänge l und welchen Winkel θ zur x^1 -Achse misst ein Beobachter in \mathcal{B} ?
- iii. Während Sie diese Zeilen lesen (Dezember 2015), werden am LHC (Large Hadron Collider) Blei-Atomkerne mit Ruhemasse $m_{\text{Pb}} \approx 194 \text{ GeV}/c^2$ und Radius $R_{\text{Pb}} \approx 6,3 \text{ fm}$ zu einer Gesamtenergie von etwa 522 TeV beschleunigt.^{1,2}
 - a) Was ist ihre Geschwindigkeit (relativ zur Vakuumlichtgeschwindigkeit)?
 - b) Was ist ihr Radius entlang der Flugrichtung für einen Beobachter, der relativ zum LHC ruht?
 - c) Zwei Blei-Kerne mit je 522 TeV stoßen aufeinander. Sei angenommen, dass sie durch einander fliegen, ohne abgebremst zu werden. Wie lange dauert das Durchqueren der Kerne? Die Antwort können Sie entweder in Yoktosekunden ($1 \text{ ys} = 10^{-24} \text{ s}$) oder in fm/c ($1 \text{ fm}/c \approx 3,3 \text{ ys}$) angeben. Warum werden die stoßenden Kerne oft „kollidierende Pfannkuchen“ genannt?

31. Relativistische Kraft

Nehmen Sie an, dass, in Analogie zur Newtonschen Mechanik, ein skalares Potential $\Phi(\mathbf{x})$ existiert, mit \mathbf{x} dem Orts-Vierervektor, sodass die Viererkraft als $F^{\mu} = -\partial^{\mu}\Phi$ geschrieben werden kann. Was gilt für den Betrag der Dreiergeschwindigkeit in einem statischen Feld? Ist dieses Ergebnis physikalisch sinnvoll?

¹1 eV (*Elektronenvolt*) ist die Energiemenge, um welche die kinetische Energie eines Elektrons zunimmt, wenn es eine Beschleunigungsspannung von 1 Volt durchläuft; $1 \text{ eV} \approx 1,602 \text{ J}$. Dann sind $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$, $1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$ (Giga-, Teraelektronenvolt) und $1 \text{ GeV}/c^2 \approx 1,783 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Schließlich ist $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ (Femtometer).

²Wanna check? Vgl. <https://op-webtools.web.cern.ch/op-webtools/vistar/vistars.php>

32. Kräftefreie relativistische Bewegung

Der Impuls eines freien relativistischen Teilchens ist durch $p^i = \gamma m v^i$ gegeben, mit γ dem Lorentz-Faktor, und genügt der Gleichung $dp^i/dt = 0$.

Beweisen Sie, dass diese Aussage äquivalent zum Newton'schen Resultat $dv^i/dt = 0$ ist.

33. Levi-Civita-Tensor

Sei $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ der völlig antisymmetrische Levi-Civita-Tensor, mit der Konvention $\epsilon^{0123} = +1$. Beweisen die folgenden Gleichungen, indem Sie die Konstanten N_1, N_2, N_3 berechnen:

i. $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = N_1$;

ii. $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} = N_2\delta_\mu^\alpha$;

iii. $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} = N_3(\delta_\mu^\alpha\delta_\nu^\beta - \delta_\mu^\beta\delta_\nu^\alpha)$.