Übung Nr. 8

Diskussionsthema: Wie kommt man von einer Lagrange-Funktion auf eine Hamilton-Funktion? Wie lauten die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen? Was ist eine kanonische Transformation?

*26. Hamilton-Formalismus — Symmetrien — Kleine Schwingungen

Betrachten Sie noch einmal die drei Systeme vom Blatt 5, Aufgabe **19**. Zur Erinnerung waren die jeweiligen Lagrange-Funktionen

$$L = \frac{m}{2}\left[R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2\right]\dot{\varphi}^2 + \frac{mgh}{2\pi}\varphi \quad \text{für } \mathbf{19.i.};$$

$$L = \frac{m_1{+}m_2}{2}\, l_1^2\,\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2\,\dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1{-}\theta_2) + (m_1{+}m_2) g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_2 \cos\theta_2 \quad \text{für } \mathbf{19.ii.};$$

$$L = \frac{m_1{+}m_2}{2}\,\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + m_2 g l \cos\theta \quad \text{für } \mathbf{19.iii.}$$

i. Hamilton-Formalismus

Bestimmen Sie jeweils

a) die kanonischen Impulse;

b) die Hamilton-Funktion als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und der kanonischen Impulse.

c) Leiten Sie daraus die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen ab.

ii. Symmetrien

a) Welche Symmetrien haben die Systeme?

b) Wie lauten die entsprechenden Noether-Erhaltungsgrößen?

iii. Kleine Schwingungen

Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen der kleinen Oszillationen des Doppelpendels der Aufgabe **19.ii.**

27. Poisson-Klammern

i. Bestimmen Sie die Poisson-Klammern $\{L^i, p^j\}$ der kartesischen Komponenten von Drehimpuls $\vec{L}$ und Impuls $\vec{p}$ eines Massenpunktes.

ii. Bestimmen Sie die Poisson-Klammern $\{L^i, L^j\}$ der kartesischen Komponenten des Drehimpulses $\vec{L}$.

28. Phasenraum

Ein Massenpunkt in einer Dimension mit Koordinate x bewege sich im Potential

$$V(x) = \begin{cases} +ax & \text{für } x \geq 0, \\ -bx & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

mit $a, b \geq 0$.

i. Leiten Sie die Hamilton-Funktion und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen her.

ii. Seien $a, b > 0$. Bestimmen Sie die Periode $\mathcal{T}(E)$ der Bewegung als Funktion der Energie E des Massenpunkts.

iii. Skizzieren Sie das Potential und die Phasenraumtrajektorien. Für letztere betrachten Sie vier verschiedene Fälle: $a = b = 1$; $a = 2b = 2$; $a = \infty$ und $b = 1$; $a = 0$ und $b = 1$.

29. Kanonische Transformationen

Seien (q, p) kanonisch konjugierte Variablen im Phasenraum für ein Problem mit $s = 1$ Freiheitsgrad.

i. Sei M die Matrix der Koordinatentransformation $(q, p) \to (Q, P)$ und

$$\mathsf{J}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass wenn die Transformation kanonisch ist, dann ist $\det M = 1$.

ii. Welche der folgenden Transformationen sind kanonisch?

a) $Q(p, q) = p,\ P(q, p) = q;$

b) $Q(p, q) = p,\ P(q, p) = -q;$

c) $Q(p, q) = pq^2,\ P(q, p) = \dfrac{1}{q};$

d) $Q(p, q) = \arctan\left(\dfrac{q}{p}\right),\ P(q, p) = \dfrac{q^2 + p^2}{2}.$