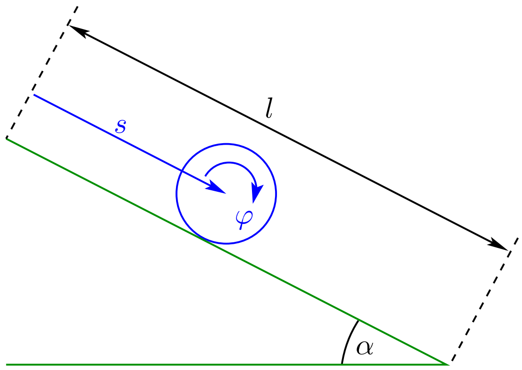
Übung Nr.7

Diskussionsthema: Kleine Schwingungen

*23. Abrollende starre Körper

i. Ein homogener Zylinder mit Masse M und Radius R rollt ohne zu gleiten eine schiefe Ebene der Länge l mit Neigungswinkel α hinab.



a) Berechnen Sie zuerst das Trägheitsmoment des Zylinders bezüglich seiner Achse — es könnte nützlich sein.

b) Drücken Sie die kinetische Energie T und die potentielle Energie V durch die generalisierten Koordinaten s und φ aus.

c) Formulieren Sie die Zwangsbedingungen. Wie viele Freiheitsgrade gibt es?

d) Stellen Sie die Euler–Lagrange-Gleichung für die Koordinate s auf und lösen Sie sie. Bestimmen Sie die Laufzeit für die Strecke l.

ii. Neben dem homogenen Vollzylinder der Frage **i.** rollen auch eine homogene Kugel und ein homogener Hohlzylinder (mit Masse nur bei $r = R$) jeweils mit Masse M und Radius R ab.

Indem Sie die Schritte der Frage **i.** (Trägheitsmomente, Euler–Lagrange-Gleichungen) für die Kugel und den Hohlzylinder wiederholen, bestimmen Sie die jeweiligen Laufzeiten. Welcher von den drei Körpern legt die Strecke in der geringsten Zeit zurück?
(Bonusfrage) Vergleichen Sie noch die Ergebnisse mit der Laufzeit eines reibungsfrei gleitenden Massenpunktes.

24. Rotierende Feder

Sei eine Feder mit Ruhelänge ℓ_0 und Federkonstante k. Ein Ende der Feder ist fest am Ursprungspunkt angebracht, am anderen Ende ist ein Massenpunkt m befestigt, der sich reibungsfrei in einer horizontalen Ebene bewegen kann. Das ganze Problem ist zwei-dimensional, d.h. sowohl die Masse als auch die Feder bleiben in dieser horizontalen Ebene.

i. Wie lauten die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichungen?

ii. Welche Symmetrien und Erhaltungssätze gibt es?

iii. Betrachten Sie eine Bewegung des Massenpunkts mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Welche Länge hat die Feder dabei?

iv. Betrachten Sie jetzt kleine Abweichungen von dieser Bewegung. Dann weicht die Länge der Feder um eine kleine Größe $\delta\ell(t)$ von der Länge aus Frage **iii.** ab.

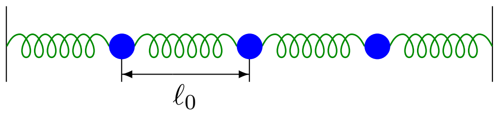
a) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz der kleinen Schwingungen.

b) Hier handelt es sich um kleine Schwingungen um eine Bewegung, während in der Vorlesung Schwingungen um eine Ruhelage betrachtet wurden. Begründen Sie, warum Sie trotzdem die Resultate der Vorlesung benutzen durften.

v. Was passiert für sehr große ω?

25. Kettenschwinger mit drei Massen

Ein Kettenschwinger besteht aus drei gleichen Massen (1,2,3), die durch Federn gleicher Stärke k untereinander und mit den Wänden verbunden sind. Die Federn seien bereits in der Gleichgewichtslage des Systems mit der Kraft F vorgespannt, wobei ℓ_0 der Gleichgewichtsabstand der Massen sei.



i. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für longitudinale Schwingungen auf. Lösen Sie sie.

ii. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für transversale Schwingungen auf. Nehmen Sie hierbei an, dass die Auslenkungen so klein sind, dass die Beträge der Zugkräfte der Federn ungefähr konstant und gleich ihrem Wert F in der Gleichgewichtslage sind.
(*Hinweis*: Verwenden Sie $\sin\alpha \sim \tan\alpha$ für kleine Winkel α.)