

Übung Nr.6

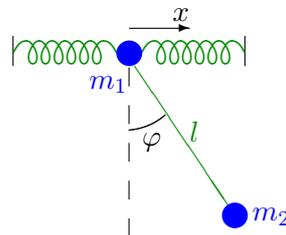
Diskussionsthemen:

- Was ist der Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen?
- Was ist der Trägheitstensor? der Satz von Steiner?

*20. Pendel an Federn

Eine Punktmasse m_1 ist durch zwei Federn an zwei Wänden befestigt. Beide Federn haben die gleiche Federkonstante k und ihre Ruhelänge entspricht gerade dem Fall, dass m_1 sich in der Mitte zwischen den Wänden befindet. Die Punktmasse m_1 darf sich nur entlang der horizontalen x -Achse bewegen.

Eine zweite Punktmasse m_2 ist am Ende eines masselosen Stabs der Länge l , der selbst an m_1 aufgehängt ist. Diese Punktmasse kann in der (x, y) -Ebene unter dem Einfluss des homogenen Schwerfeldes schwingen. Sei φ der Auslenkungswinkel des Pendels.



- i. Formulieren Sie die Zwangsbedingungen. Wie viele Freiheitsgrade gibt es? (Begründen Sie Ihre Antwort!)
 - ii. Wählen Sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten q_1, q_2 und drücken Sie die kinetischen und potentiellen Energien der Punktmassen dadurch aus. Geben Sie die Lagrange-Funktion an.
 - iii. Leiten Sie zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen ab.
 - iv. Sei nun angenommen, dass der Auslenkungswinkel φ klein ist.
- a) Zeigen Sie, dass sich beide Bewegungsgleichungen jeweils in der Form

$$a_i \ddot{q}_i(t) + b_i q_i(t) = f_i(q_j(t), \dot{q}_j(t), \ddot{q}_j(t))$$

schreiben lassen, mit a_i und b_i konstanten Koeffizienten, während $q_i(t)$, $i \in \{1, 2\}$ die eine und $q_j(t)$ die andere generalisierte Koordinate ist.

- b) (Bonusfrage: entwickeln Sie Ihre mathematische „Intuition“...) Können Sie argumentieren, welcher Term die Lösung der in **a)** gefundenen gekoppelten Gleichungen besonders erschwert.

21. Trägheitstensor I

Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente und Hauptträgheitsachsen des Trägheitstensors

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ kg m}^2.$$

22. Trägheitstensor II

Gegeben sei ein homogener Quader mit Masse M und Kantenlängen a, b und c , die jeweils parallel zur x -, y - bzw. z -Achse liegen. Berechnen Sie den Trägheitstensor des Quaders

- i. im Koordinatensystem, dessen Ursprung im Schwerpunkt des Quaders liegt;

- ii. direkt über die Definition des Trägheitstensors im Koordinatensystem, dessen Ursprung in einer Ecke des Quaders liegt;
- iii. im gleichen System wie in i., aber unter Nutzung des Ergebnisses aus ii. und des Satzes von Steiner.