Übung Nr.5

Diskussionsthema: Was ist die Lagrange-Funktion? die Wirkung? das Hamilton'sche Prinzip? Wie lauten die Euler–Lagrange-Gleichungen?

*16. Bewegungsgleichungen in sphärischen Koordinaten

Sei $\vec{x}(t) = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y + z(t)\,\vec{e}_z$ die Bahnkurve eines Massenpunkts, parametrisiert mithilfe kartesischer Koordinaten $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Eine entsprechende Parametrisierung durch *sphärische* oder *Kugelkoordinaten* $r(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$ wird definiert durch

$$x(t) = r(t)\sin\theta(t)\cos\varphi(t), \quad y(t) = r(t)\sin\theta(t)\sin\varphi(t), \quad z(t) = r(t)\cos\theta(t). \tag{1}$$

Die zugehörigen Basisvektoren $\vec{e}_r(t)$, $\vec{e}_\theta(t)$, $\vec{e}_\varphi(t)$ werden durch

$$\dot{\vec{x}}(t) = \dot{x}(t)\,\vec{e}_x + \dot{y}(t)\,\vec{e}_y + \dot{z}(t)\,\vec{e}_z = \dot{r}(t)\,\vec{e}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\,\vec{e}_\theta(t) + r(t)\sin\theta(t)\dot{\varphi}(t)\,\vec{e}_\varphi(t) \tag{2}$$

definiert.

i. Drücken Sie $\vec{e}_r(t)$, $\vec{e}_\theta(t)$, $\vec{e}_\varphi(t)$ durch $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ aus. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\big(\vec{e}_r(t), \vec{e}_\theta(t), \vec{e}_\varphi(t)\big)$ auf 1 normiert sind und ein orthogonales Rechtssystem bilden.

ii. Wir wollen zunächst den Lagrange-Formalismus verwenden, um die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes in Anwesenheit eines Potentials $V(r, \theta, \phi)$ in sphärischen Koordinaten herzuleiten.

a) Drücken Sie die kinetische Energie des Massenpunkts durch $r(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$ und ihre Zeitableitungen aus.

b) Benutzen Sie die Euler–Lagrange-Gleichungen bezüglich der Kugelkoordinaten, um die gesuchten Bewegungsgleichungen zu schreiben.

iii. Sei jetzt angenommen, dass das Potential kugelsymmetrisch ist — d.h. $V(r)$ hängt nur vom Abstand r zum Nullpunkt ab —, und dass die Bewegung durch eine Zwangskraft so eingeschränkt wird, dass der Massenpunkt auf einer Kegeloberfläche $\theta = \theta_0$ bleiben muss.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für dieses Problem auf.

b) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für die Radialbewegung sich in der Form

$$m\ddot{r}(t) = -\frac{\partial V_{\text{eff}}\big(r(t)\big)}{\partial r}$$

umschreiben lässt. Wie lautet das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$?

c) (Bonusfrage) Was ist der physikalische Inhalt der anderen Bewegungsgleichung? Erkennen Sie dabei eine Ihnen bekannte Größe.

17. Bewegungsgleichungen in sphärischen Koordinaten (2)

Anstatt im Lagrange-Formalismus zu arbeiten, könnte man auch die in Aufgabe **16.ii** gefundenen Bewegungsgleichungen im Rahmen der Newton'schen Vorgehensweise finden.

i. Berechnen Sie die Zeitableitungen der durch Gl. (1)–(2) definierten Vektoren $\vec{e}_r(t)$, $\vec{e}_\theta(t)$, $\vec{e}_\varphi(t)$ und schreiben Sie diese als Linearkombination von $\vec{e}_r(t)$, $\vec{e}_\theta(t)$, $\vec{e}_\varphi(t)$.

ii. Berechnen Sie die Beschleunigung $\ddot{\vec{x}}(t)$, ausgedrückt durch $r(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$ (und ihre Ableitungen) und $\vec{e}_r(t)$, $\vec{e}_\theta(t)$, $\vec{e}_\varphi(t)$.

iii. In sphärischen Koordinaten lautet der Gradient einer Funktion $f(r, \theta, \varphi)$

$$\vec{\nabla} f(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\vec{e}_\varphi. \tag{3}$$

Wie lauten die Bewegungsgleichungen für einen Massenpunkt, der sich in einem Potential $V(r, \theta, \varphi)$ bewegt?

iv. Welche Herleitung war kürzer, diese Aufgabe oder Übung **16.ii**?

18. Extremierung eines Funktionals

Ein Flugzeug fliegt in der (x, z)-Ebene vom Punkt $(-a, 0)$ zum Punkt $(0, a)$ mit $a > 0$, wobei der Erdboden bei $z = 0$ ist und die z-Achse vertikal nach oben zeigt. Die Flugkosten in Höhe z sind $\exp(-kz)$ pro Einheitsstrecke des Fluges, mit $0 < k < \pi/(2a)$. Finden Sie die Flugbahn $z(x)$, welche die Flugkosten minimiert.

19. Lagrange-Funktionen

Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion für die folgenden Systeme und leiten Sie die zugehörigen Euler–Lagrange-Gleichungen ab:

i. Eine Perle, die reibungsfrei auf einer Helix (Schraubenlinie) mit Ganghöhe H und Radius R im Schwerefeld der Erde gleitet.

ii. Ein ebenes Doppelpendel (Abb. 1).

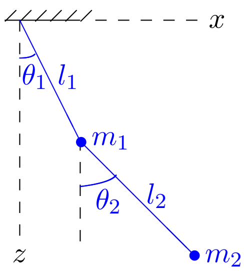

Abb. 1

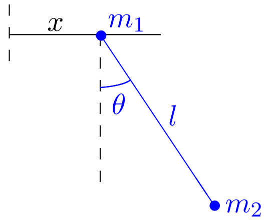

Abb. 2

iii. Ein ebenes Pendel mit der Masse m_2, dessen Aufhängepunkt mit der Masse m_1 sich entlang einer horizontalen Gerade bewegen kann (Abb. 2).

In **ii.** und **iii.** bestehen die Verbindungen aus masselosen Stäben.