Übung Nr.4

Diskussionsthemen:

- Was ist die reduzierte Masse eines Systems aus zwei wechselwirkenden Massenpunkten?
- Wie lautet die Newton'sche Gravitationskraft? Was ist das entsprechende Potential?
- Was sind die Kepler-Gesetze?

*13. Virialsatz

Sei ein System Σ aus N Teilchen, die nur konservativen Kräften unterliegen. Wie in der Vorlesung werden die Massen bzw. Bahnkurven der Teilchen mit m_a bzw. $\vec{x}_a(t)$ bezeichnet. Sei T bzw. V die gesamte kinetische bzw. potentielle Energie von Σ. Die Gesamtkraft auf Teilchen a ist somit $-\vec{\nabla}_a V$.

i. Drücken Sie die Summe $\displaystyle\sum_{a=1}^{N} m_a \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}_a(t)}{\mathrm{d}t^2} \cdot \vec{x}_a(t)$

a) durch das Potential V — genauer, durch dessen Gradienten — und die Bahnkurven $\vec{x}_a(t)$ aus;

b) durch die kinetische Energie T, die Bahnkurven und die Geschwindigkeiten der Teilchen aus.

Hinweis: Berechnen Sie dafür zunächst die Zeitableitung des Produkts $\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}_a(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{x}_a(t)$.

ii. Virialsatz

Der zeitliche Mittelwert einer beliebigen Funktion $f(t)$ wird definiert als

$$\langle f \rangle_t \equiv \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)\,\mathrm{d}t,$$

wobei es angenommen wird, dass der Limes des Integrals existiert.

a) Es wird angenommen, dass das Produkt $\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}_a(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{x}_a(t)$ nie unendlich wird. Zeigen Sie, dass

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{a=1}^{N} m_a \frac{\mathrm{d}\vec{x}_a(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{x}_a(t) \right] \right\rangle_t = 0.$$

b) Indem Sie die in Fragen **i.a)** und **i.b)** gefundenen Ausdrücke gleich setzen und über die Zeit mitteln, beweisen Sie den *Virialsatz*

$$2\,\langle T \rangle_t = \left\langle \sum_{a=1}^{N} \big(\vec{\nabla}_a V\big) \cdot \vec{x}_a(t) \right\rangle_t. \tag{1}$$

iii. Spezialfälle

Jetzt wird angenommen, dass es keine äußere Kräfte auf das System gibt, und dass die inneren Zweikörperkräfte sich aus Potentialen $V_{ab}\big(|\vec{r}_b - \vec{r}_a|\big) = \alpha_{ab}|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $\alpha_{ab} \in \mathbb{R}$ ableiten lassen.

a) Zeigen Sie zunächst die Identitäten $\vec{\nabla}_a|\vec{r}_b - \vec{r}_a| = -\dfrac{\vec{r}_b - \vec{r}_a}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|}$ und $\dfrac{\mathrm{d}V_{ab}}{\mathrm{d}|\vec{r}_b - \vec{r}_a|} = n\dfrac{V_{ab}}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|}$.

b) Folgern Sie daraus, dass sich der Virialsatz (1) zu $2\,\langle T \rangle_t = n\,\langle V \rangle_t$ vereinfacht.

c) Wie lautet der Virialsatz für Körper, die über das Newton'sche Gravitationspotential wechselwirken?

d) Wie lautet der Virialsatz für gekoppelte harmonische Oszillatoren mit $V_{ab} = \frac{1}{2}k_{ab}|\vec{r}_b - \vec{r}_a|^2$. (Bonusfrage) Kannten Sie schon im Fall $N = 1$ ein ähnliches Ergebnis?

14. Zentralkraftproblem

Ein Massenpunkt der Masse μ bewege sich mit der Energie E und dem Drehimpuls $\ell = |\vec{L}|$ im Zentralpotential $V(r) = -\alpha/r^2$ mit $\alpha > 0$.

i. Berechnen Sie das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$. Skizzieren Sie seinen Verlauf und diskutieren Sie anhand Ihrer Skizze die Bahnkurve des Massenpunkts qualitativ. Es gibt insgesamt drei verschiedene physikalisch sinnvolle Fälle für E und ℓ. Welche?

ii. Stellen Sie die Gleichung für $r(t)$ auf und berechnen Sie $t(r)$. Bei geeigneter Wahl des Nullpunkts von t erhalten Sie

$$t = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{\mu}{2}}\sqrt{Er^2 - \frac{\ell^2}{2\mu} + \alpha}.$$

Unter welchen Umständen fällt ein Massenpunkt von einem Abstand r_0 ins (Kraft)Zentrum? Wenn er das tut, wie lange braucht er dafür?

iii. Stellen Sie die Gleichung für den Winkel φ auf und berechnen Sie $\varphi(r)$.

15. Lenz-Vektor

i. Zeigen Sie, dass für das Kepler-Problem mit dem Potential $V(r) = -\alpha/r$ der Lenz'sche Vektor $\vec{M} \equiv \vec{v} \times \vec{L} - \alpha\vec{e}_r$ eine Erhaltungsgröße ist.

ii. Es wird angenommen, dass die Richtung des Drehimpulses $\vec{L}$ die z-Richtung definiert. In welcher Ebene liegt $\vec{M}$?

iii. Wählen Sie die Anfangsbedingungen $\vec{x}(0) = r_0\,\vec{e}_x$ und $\vec{v}(0) = v_0\,\vec{e}_y$. Verwenden Sie die Erhaltung von Drehimpuls und Lenz'schem Vektor um die Gleichung

$$y^2 = \lambda(\lambda-2)x^2 - 2\lambda(\lambda-1)r_0\,x + \lambda^2 r_0^2$$

mit $\lambda \equiv \mu r_0 v_0^2/\alpha$ für die Bahnkurve $\vec{x} = (x, y, 0)$ herzuleiten. Für welche Werte der Parameter erhalten Sie Parabel, Kreis, Gerade, Hyperbel und Ellipse?