Übung Nr.3

Diskussionsthemen:

- Was sind Galilei-Transformationen?
- Was sind Scheinkräfte? Welche kennen Sie?
- Welche Erhaltungssätze gelten für Systeme von Massenpunkten ohne äußere Kräfte?

*9. Foucault'sches Pendel

Betrachten Sie ein Pendel der Länge L, an dessen Ende ein Massenpunkt im Schwerefeld $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ eine 3-dimensionale Bewegung ausführen kann. Die Koordinaten des Massenpunktes im unausgelenkten Zustand seien $x = y = z = 0$.

i. Pendel in einem Inertialsystem

Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für den Massenpunkt auf.

ii. Kleine Oszillationen

a) Zeigen Sie, dass in erster Ordnung in kleinen Auslenkungen α von der Vertikalen die Bewegungsgleichungen die Form

$$\ddot{x}(t) = -\frac{g}{L}x(t), \qquad \ddot{y}(t) = -\frac{g}{L}y(t) \tag{1}$$

annehmen.

Hinweis: In mathematischen Vorlesungen (Rechenmethoden, usw.) haben Sie die Taylor-Entwicklung kennengelernt...

b) Lösen Sie die Gleichungen (1) für die Anfangsbedingungen $x(0) = r_0$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v_0$ und skizzieren Sie die Bahnkurve.

iii. Pendel in einem rotierenden Bezugssystem

Es soll jetzt der Effekt der Erdrotation durch Einbeziehung der Coriolis-Kraft berücksichtigt werden. Am Breitengrad ϑ hat die Winkelgeschwindigkeit der Erde bzgl. des oben definierten Koordinatensystems die Komponenten $\vec{\omega} = (-\omega\cos\vartheta, 0, \omega\sin\vartheta)$.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für den Massenpunkt in Gegenwart der Coriolis-Kraft auf, erstens im allgemeinen Fall, dann für kleine Auslenkungen des Pendels.

b) Zeigen Sie, dass unter Vernachlässigung von Ω^2 gegenüber g/L

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) \\ -\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

eine Lösung der Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen ist, falls $\big(x(t), y(t)\big)$ eine Lösung aus **ii.b)** und $\Omega \propto \omega$ zu bestimmen ist. Skizzieren Sie die Bewegung. Interpretieren Sie das Resultat als Präzessionsbewegung. Wie groß ist die Periodendauer der Präzession, wenn das Pendel in der Uni-Halle aufgehängt wird?

10. Sphärische Koordinaten

i. Wie lassen sich sphärische Koordinaten (= Kugelkoordinaten) mit Hilfe von kartesischen Koordinaten darstellen?

ii. Wie lautet die Umkehrtransformation?

iii. Stellen Sie sich vor, ein Fahrzeug fährt auf der Erdoberfläche entlang des nullten Längengrades vom Nordpol zum Südpol mit konstanter Geschwindigkeit gegenüber der Erde (genauer soll der Betrag der Geschwindigkeit konstant bleiben). Die Erde wird dabei als Kugel mit dem Radius R_{E} betrachtet. Wie kann man diese Bewegung in kartesischen Koordinaten und wie in Kugelkoordinaten darstellen?

11. Rutschbahn

In einem Schwimmbad rutscht jemand reibungsfrei eine spiralförmige Rutschbahn hinunter. Die Spirale hat den Radius R und drei volle Windungen auf einem Höhenunterschied h. Berechnen Sie die Bahnkurve $\vec{x}(t)$ in einem geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystem.

Hinweis: Benutzen Sie Energieerhaltung.

12. Kegelschnitte

i. Zeigen Sie, dass die in Polarkoordinaten definierte Kurve $r = p/(1 + \epsilon \cos\varphi)$ für $\epsilon \neq 1$ in geeignet gewählten kartesischen Koordinaten durch

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

beschrieben werden kann, mit $a, b > 0$, wobei das ober bzw. untere Vorzeichen dem Fall $0 < \epsilon < 1$ bzw. $\epsilon > 1$ entspricht. Geben Sie a und b als Funktionen von p und ϵ an.

ii. Prüfen Sie, dass die Kurve mit $0 < \epsilon < 1$ bzw. $\epsilon > 1$ eine Ellipse bzw. eine Hyperbel beschreibt.

iii. Überprüfen Sie, dass man im Grenzfall $\epsilon = 1$ die bekannte Definition einer Parabel in kartesischen Koordinaten erhält.