Übung Nr.2

Diskussionsthema: Wie ist die Arbeit einer Kraft definiert? Was ist ein konservatives Kraftfeld? Was wissen Sie über die Arbeit einer konservativen Kraft?

*5. Eindimensionale Bewegung mit Reibungskraft

Ein Körper bewege sich in einer Dimension unter dem Einfluss der Reibungskraft $f(v)$ nach folgender Bewegungsgleichung

$$m\dot{v} = f(v), \quad v \geq 0. \tag{1}$$

Die Reibungskraft $f(v)$ ist durch zwei Parameter charakterisiert, die Haftreibung H und den Reibungskoeffizienten γ, sie hat die Form

$$f(v) = -H\left[1 + \left(\frac{\gamma v}{H}\right)^n\right]^{1/n}. \tag{2}$$

i. Bestimmen Sie den Grenzwert von $f(v)$ für $v \to 0$ sowie das asymptotische Verhalten für $v \to \infty$.

ii. Wie verhält sich die Reibungskraft für $n \to \infty$?

iii. Skizzieren Sie den Verlauf von $f(v)$ für $n = 2$ und $n \to \infty$.

iv. Im weiteren sei $n = 2$. Geben Sie die Lösung $v(t)$ der Bewegungsgleichung (1). Trennen Sie dazu die Variablen und verwenden Sie Hyperbelfunktionen.
Machen Sie sich vorher die Eigenschaften der Hyperbelfunktionen klar. Zeigen bzw. ermitteln Sie:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \tag{3}$$

$$\sinh(x+y) = ? \quad , \quad \cosh(x+y) = ? \tag{4}$$

$$\sinh'(x) = ? \quad , \quad \cosh'(x) = ? \tag{5}$$

$$\operatorname{arsinh}'(x) = ? \quad , \quad \operatorname{arcosh}'(x) = ? \tag{6}$$

Stellen Sie die Umkehrfunktionen mittels ln dar.

v. Bestimmen Sie die Stoppzeit und stellen Sie diese als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit graphisch dar.

vi. Bestimmen Sie die Wegstrecke, auf der ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 zum Stehen kommt.

6. Konservative Kraftfelder (1)

i. Erklären Sie den Unterschied zwischen den Kraftfeldern $\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r})\vec{r}$ und $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$.

ii. Beweisen Sie, dass das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$ konservativ ist.

iii. Berechnen Sie das Potential für $f(r) = -\alpha r^2$. Im Koordinatenursprung soll das Potential null sein.

7. Konservative Kraftfelder (2)

i. Ist das folgende für $r \neq 0$ definierte (in Kugelkoordinaten gegebene) Kraftfeld konservativ? Geben Sie ggf. ein Potential an (μ ist eine Konstante).

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\mathrm{e}^{-\mu r}}{r^2}(1 + \mu r)\vec{\mathrm{e}}_r. \tag{7}$$

ii. Ist das folgende außer auf der z-Achse definierte Kraftfeld konservativ? Geben Sie ggf. ein Potential an. (Hinweis: Betrachten Sie die Arbeit entlang eines Weges, der die z-Achse umschließt.)

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

iii. $\vec{a}$, $\vec{b}$ seien konstante Vektoren. Welche Bedingungen müssen diese erfüllen, damit das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \big(\vec{a} \cdot \vec{r}\big)\vec{b}$ konservativ ist?

8. Nabla-Operator

i. Berechnen Sie $\vec{\nabla} r$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$ und $\vec{\nabla} \times \vec{r}$.

ii. Die Graßmann-Identität („bac-cab Regel“) lautet

$$\vec{a} \times \big(\vec{b} \times \vec{c}\big) = \vec{b}\big(\vec{a} \cdot \vec{c}\big) - \vec{c}\big(\vec{a} \cdot \vec{b}\big).$$

Prüfen Sie (unter Verwendung von $\epsilon_{ijk}\epsilon^{i\ell m} = \delta_j^\ell \delta_k^m - \delta_j^m \delta_k^\ell$, mit Summationskonvention), ob sie in dieser Form auch für $\vec{a} \times \big(\vec{\nabla} \times \vec{c}\big)$ gilt.