Übung Nr. 14

Diskussionsthemen:

- Wie lauten die Maxwell-Gleichungen? Wie lassen sich die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus Potentialen ableiten? Ist die Definition dieser Potentiale eindeutig?
- Wie lautet die klassische Wellengleichung?

*47. Dipolstrahler

Das Vektorpotential eines mit Kreisfrequenz ω funktionierenden Dipolstrahlers lautet

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega\vec{P}\sin(kr-\omega t)}{r} \tag{1}$$

mit $k \equiv \omega/c$, $r \equiv |\vec{r}|$, und $\vec{P}$ dem elektrischen Dipolmoment des Strahlers, der im Punkt $\vec{r} = \vec{0}$ liegt.

i.

a) Seien $f(\vec{r})$ eine differenzierbare Funktion und $\vec{V}$ ein konstanter Vektor; prüfen Sie die folgende Identität:

$$\vec{\nabla} \times \left[f(\vec{r})\,\vec{V}\,\right] = \left[\vec{\nabla}f(\vec{r})\right] \times \vec{V}.$$

b) Bestimmen Sie die dem Vektorpotential (1) entsprechenden magnetischen und elektrischen Felder $\vec{B}(t,\vec{r})$ und $\vec{E}(t,\vec{r})$.

Hinweis: Das Skalarpotential brauchen Sie *nicht*, um $\vec{E}$ zu bestimmen.

ii. Zeigen Sie, dass in der sogenannten „Nahzone" $kr \ll 1$ die magnetische Induktion viel kleiner ist als das elektrische Feld.

iii. Zeigen Sie, dass in der „Fernzone" $kr \gg 1$ die typischen Eigenschaften der elektromagnetischen Welle im Vakuum

$$\vec{e}_r \cdot \vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{e}_r \cdot \vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{E}(t,\vec{r}) \cdot \vec{B}(t,\vec{r}) = 0 \quad \text{und} \quad \left|\vec{B}(t,\vec{r})\right| = \frac{\left|\vec{E}(t,\vec{r})\right|}{c}$$

erfüllt sind, wobei $\vec{e}_r \equiv \vec{r}/r$.

Hinweis: Für diese Fernfelder dürfen Sie Terme in $1/kr$ gegen 1 vernachlässigen.

iv. Bestimmen Sie die zeitgemittelte Energiestromdichte in der Fernzone.

v. (Bonusfrage) Wie lautet das Skalarpotential $\Phi(t,\vec{r})$, das dem Vektorpotential (1) entspricht?

48. Magnetisches Dipolmoment und Drehimpuls

Sei eine Stromverteilung bestehend aus N identischen bewegten Punktladungen mit Masse m und elektrischer Ladung q.

i. Drücken Sie die Stromdichte $\vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r})$ durch die Positionen und Geschwindigkeiten $\vec{r}_a(t)$ bzw. $\vec{v}_a(t)$ der Punktladungen aus.

ii. Die letzteren bewegen sich entlang einer geschlossenen Kurve. Zeigen Sie, dass das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}$ der Stromverteilung proportional zum Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ der Punktladungen ist.

49. Elektrisches Feld aus Strömen

Die stationären elektrischen Felder $\vec{E}(\vec{r})$ der Elektrostatik sind verursacht durch statische Punktladungen mit Ladungsverteilung $\rho_{\text{el.}}(\vec{r})$. Sie werden hiernach zeigen, dass es auch möglich ist, ein zeitunabhängiges elektrisches Feld durch eine geeignete Stromverteilung $\vec{\jmath}_{\text{el.}}$ in Abwesenheit einer Ladungsverteilung zu erzeugen.

i. Sei $\vec{\jmath}_{\rm el.,0}(\vec{r})$ eine stationäre Stromdichte und $\vec{B}_0(\vec{r})$ die entsprechende magnetische Induktion, wobei $\rho_{\rm el.,0}(\vec{r}) = 0$ und somit $\vec{E}_0(\vec{r}) = \vec{0}$. Eine zeitabhängige Stromverteilung sei durch $\vec{\jmath}_{\rm el.}(t,\vec{r}) = \vec{\jmath}_{\rm el.,0}(\vec{r})\,t/\tau$ beschrieben, mit τ einer Konstante.

a) Zeigen Sie, dass das elektromagnetische Feld bestehend aus $\vec{B}(t,\vec{r}) \equiv \vec{B}_0(\vec{r})\,t/\tau$ und einem zu bestimmenden stationären elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{r})$ die Maxwell-Gleichungen mit Quellen $\rho_{\rm el.}(t,\vec{r}) = 0$ und $\vec{\jmath}_{\rm el.}(t,\vec{r})$ erfüllt.

Hinweis: Vergessen Sie nicht, dass $\vec{B}_0(\vec{r})$ und $\vec{\jmath}_{\rm el.,0}(\vec{r})$ den stationären Maxwell-Gleichungen genügen.

b) Wodurch unterscheidet sich das gefundene Feld $\vec{E}(\vec{r})$ von einem elektrostatischen Feld (erzeugt durch eine statische Ladungsverteilung)?

ii. Zeigen Sie, dass das Feld $\vec{E}(\vec{r})$ die gleiche Struktur hat wie das stationäre magnetische Feld $\vec{B}_1(\vec{r})$ erzeugt durch eine zu bestimmende zeitunabhängige Stromverteilung $\vec{\jmath}_{\rm el.,1}(\vec{r})$, die sich durch $\vec{B}_0$ und τ ausdrücken lässt.

50. Faraday-Gesetz

Laut der Maxwell–Faraday-Gleichung induziert die zeitliche Änderung einer zeitabhängigen magnetischen Induktion $\vec{B}(t,\vec{r})$ ein elektrisches Feld $\vec{E}(t,\vec{r})$. Zeigen Sie, dass das letztere durch

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\vec{B}(t,\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,{\rm d}^3\vec{r}\,'$$

gegeben ist, wobei $\rho_{\rm el.}(t,\vec{r}) = 0$ angenommen wird.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Herleitung des Biot–Savart-Gesetzes.

51. Sphärische Wellen

Für eine kugelsymmetrische skalare Funktion $f(r)$ mit $r \equiv |\vec{r}|$ gilt

$$\triangle f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\,\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right] = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\big[r f(r)\big].$$

Bestimmen Sie die allgemeine Form der Lösung $u(t,r)$ der klassischen Wellengleichung

$$\triangle u(t,r) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(t,r)}{\partial t^2} = 0.$$

Hinweis: Die letzte angegebene Formel für den Laplace-Operator ist hier (wie oft) die günstigste.