Übung Nr. 13

Diskussionsthemen:

- Was sind die Grundgleichungen der Magnetostatik? das Biot–Savart-Gesetz?
- Wie ist das Vektorpotential der Magnetostatik definiert? Ist die Definition eindeutig?

*43. Magnetischer Dipol

Eine dünne Kugelschale (Radius R, Mittelpunkt der Kugel im Ursprung) mit homogener Oberflächenladungsdichte σ dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um die x^3-Achse.

i. Ladungs- und Ladungsstromdichte

a) Wie lautet die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$?

b) Wie lautet die Geschwindigkeit eines Punktes der Kugelfläche mit Polar- und Azimutwinkel (θ, φ)? Folgern Sie daraus die Ladungsstromdichte $\vec{\jmath}(\vec{r})$.

ii. Es soll nun das $\vec{B}$-Feld innerhalb und außerhalb der Kugelschale bestimmt werden. Ein geeigneter Ansatz ist:

$$\vec{B} = f(r) x^3 \, \vec{r} - g(r) \, \vec{e}_3$$

mit $r \equiv |\vec{r}|$.

a) Wie weit legen die Grundgleichungen der Magnetostatik im stromfreien Außen- und Innenraum die Funktionen f und g fest?

b) Es bleiben zwei Konstanten übrig, welche ist innen und welche ist außen Null?

iii. Bestimmen Sie die beiden noch unbekannten Konstanten. Betrachten Sie dazu die Maxwell-Gleichungen auf der Kugelschale, d.h. auch bei $r = R$.

Hinweis: In dieser Aufgabe treten mehrmals (**ii.a**, **iii.**) gewöhnliche Differentialgleichungen auf, die sich entweder über „Separation der Variablen“ oder „Variation der Konstanten“ lösen lassen, vgl. Vorlesung *Rechenmethoden der Physik* (Kap. 4 für die Vorlesung im SoSe 2015).

44. Helmholtz-Spule

Zwei parallele kreisförmige Leiterschleifen werden beide vom Strom I in gleicher Richtung durchflossen. Die Kreise liegen parallel zur x-y-Ebene, sie haben beide den Radius R und ihre Mittelpunkte liegen bei $(x, y, z) = (0, 0, d)$ und $(0, 0, -d)$. Welche Beziehung muss zwischen dem Radius R und dem Abstand $D = 2d$ der Kreise gelten, damit das Magnetfeld in der Nähe des Koordinatenursprungs möglichst wenig variiert?

45. Definition des Amperes

Zwei dünne, unendlich lange Leiter verlaufen parallel mit einem Abstand von $d = 1$ m und werden mit einem Strom von $I = 1$ A durchflossen.

i. Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{B}$ des einen Leiters mithilfe des Biot–Savart-Gesetzes. Hierbei werden Sie auf folgendes Integral stoßen:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Versuchen Sie dieses zu lösen. Falls Sie zu keinem Ergebnis kommen, dürfen Sie das Integral nachschlagen.

ii. Berechnen Sie die Kraft auf den anderen Leiter pro Meter Leiterlänge.
Das Ergebnis ist kein Zufall: Das Ampere ist gerade als die Stromstärke definiert, bei der sich die berechnete Kraft ergibt.

46. Gleichförmiges Magnetfeld

i. Zwei Formel der Vektoranalysis

Indem Sie kartesische Koordinaten verwenden, beweisen Sie die folgenden Identitäten, wobei $\vec{a}(\vec{r})$ und $\vec{b}(\vec{r})$ zwei Vektorfelder sind:

a) $\vec{\nabla} \cdot \big[\vec{a}(\vec{r}) \times \vec{b}(\vec{r})\big] = \vec{b}(\vec{r}) \cdot \big[\vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r})\big] - \vec{a}(\vec{r}) \cdot \big[\vec{\nabla} \times \vec{b}(\vec{r})\big]$;

b) $\vec{\nabla} \times \big[\vec{a}(\vec{r}) \times \vec{b}(\vec{r})\big] = \big[\vec{\nabla} \cdot \vec{b}(\vec{r})\big]\vec{a}(\vec{r}) - \big[\vec{\nabla} \cdot \vec{a}(\vec{r})\big]\vec{b}(\vec{r}) + \big[\vec{b}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\big]\vec{a}(\vec{r}) - \big[\vec{a}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\big]\vec{b}(\vec{r})$. Dabei ist für jeden Vektor $\vec{c}$ der Differentialoperator $\vec{c} \cdot \vec{\nabla}$ durch

$$\vec{c} \cdot \vec{\nabla} \equiv c^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + c^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + c^3 \frac{\partial}{\partial x^3},$$

gegeben, mit $\{c^i\}$ den kartesischen Koordinaten von $\vec{c}$.

Hinweis: Die Formel $\epsilon^{ijk}\epsilon^{i\ell m} = \delta^{j\ell}\delta^{km} - \delta^{jm}\delta^{k\ell}$ kann hilfreich sein.

ii. Sei $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{B}_0 \times \vec{r}$ ein Vektorpotential mit $\vec{B}_0$ einem konstanten Vektor.

a) Berechnen Sie $\vec{\nabla} \times \vec{r}$. Zeigen Sie mithilfe von **i.a)**, dass das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ die Coulomb-Eichbedingung erfüllt.

b) Berechnen Sie nun $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$. Folgern Sie daraus und aus **i.b)** die magnetische Induktion, die sich aus $\vec{A}(\vec{r})$ ableiten lässt.

c) Sei angenommen, dass $\vec{B}_0 = B_0\,\vec{e}_3$. Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten von $\vec{A}(\vec{r})$ und finden Sie damit die Ergebnisse aus **ii.a)** und **b)** für $\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})$ wieder.

iii. Sei $\vec{A}'(\vec{r}) = x^1 B_0\,\vec{e}_2$. Berechnen Sie die Rotation und die Divergenz dieses Vektorfeldes und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus **ii.c)**.