Übung Nr. 12

Diskussionsthemen:
- Was sind die Grundgleichungen der Elektrostatik? das Gauß'sche Gesetz?
- Was sind Green'sche Funktionen? orthonormierte Funktionen?
- Was ist die Multipolentwicklung?

*38. Elektrisch geladener Stab

Gesucht ist das elektrostatische Potential eines homogen geladenen und unendlich dünnen geraden Stabes mit elektrischer Ladung pro Längeneinheit λ. (Wählen Sie die z-Achse in Richtung des Stabes).

i. Betrachten Sie zunächst einen unendlich langen Stab.

a) Nutzen Sie die Symmetrie des Problems aus, um den Fluss des elektrischen Feldes durch einen endlich hohen Zylinder, der symmetrisch um den Stab herum liegt, zu berechnen.

b) Bestimmen Sie daraus das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ und das Potential $\Phi(\vec{r})$.

ii. Betrachten Sie nun einen Stab der Länge $2a$ mit Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems.

a) Geben Sie die Ladungsdichte in kartesischen Koordinaten an und bestimmen Sie daraus das Potential $\Phi(\vec{r})$.

b) Erhalten Sie für das Ergebnis aus **ii.a** im Limes $a \to \infty$ wieder das Potential aus **i.b**?

c) Wie ergibt sich im Grenzfall $a \to 0$ das Coulomb-Potential (bei fester Gesamtladung $Q = 2a\lambda$)?

iii. Sei nun angenommen, dass der Stab nicht unendlich dünn ist, sondern ein unendlich langer, homogen geladener Zylinder mit Achse gleich der z-Achse und Radius b ist. Dieser Zylinder sei noch durch seine Ladung pro Längeneinheit charakterisiert.
Bestimmen Sie das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$.

iv. (Bonusfrage) Welches Newton'sche Gravitationsfeld $\vec{\mathcal{G}}$ erzeugt ein unendlich dünner homogener Stab mit linearer Massendichte (d.h. Masse pro Längeneinheit) μ? Dabei ist $\vec{\mathcal{G}}$ so definiert, dass die resultierende Gravitationskraft auf eine (Test)Masse m durch $m\vec{\mathcal{G}}$ gegeben ist.

39. Elektrisch geladene Vollkugel

Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ und das elektrische Potential $\Phi(\vec{r})$ einer homogen geladenen Vollkugel mit Radius R und Gesamtladung Q.

40. Rotationssymmetrisches Feld

Sei in einem ladungsfreien Gebiet ein elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(\vec{r})\,\vec{e}_r(\vec{r}) + E_z(\vec{r})\,\vec{e}_z$ mit Rotationssymmetrie um die z-Achse, wobei $\vec{e}_r$ bzw. $\vec{e}_z$ den Einheitsvektor in radialer bzw. z-Richtung bezeichnet. Zeigen Sie, dass in der Umgebung der z-Achse gilt

$$E_r(\vec{r}) \simeq -\frac{r}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Hinweis: Mit dem richtigen Argument ist die Lösung weniger als 5 Zeilen lang...

41. Multipolentwicklung

Wie transformieren die Gesamtladung Q, das elektrische Dipolmoment $\vec{P}$ (bei $Q = 0$) und die elektrischen Quadrupolmomente Q^{ij} (bei $Q = 0$ und $\vec{P} = \vec{0}$) einer Ladungsverteilung $\rho_{\mathrm{el.}}(\vec{r})$

i. unter Translationen des Koordinatenursprungs

ii. unter Drehungen des Koordinatensystems.

42. Ein Theorem der Vektoranalysis

Zeigen Sie, dass das Vektorfeld

$$\vec{V}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \left[\int \frac{\vec{W}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \right] - \vec{\nabla} \left[\int \frac{Q(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \right]$$

die Bedingungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{r}) = Q(\vec{r})$ und $\vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r}) = \vec{W}(\vec{r})$ erfüllt.