# Übung Nr. 11

## *37. Elektromagnetismus im Fourier-Raum

Das Ziel dieser Aufgabe ist, Ihre Kenntnisse über Fourier-Transformationen aufzufrischen — und auch eine nützliche Formulierung des Elektromagnetismus kennenzulernen.
Sei $f(t,\vec{r})$ eine (reell- oder komplexwertige) skalare Funktion von Zeit und Ort. Die zeitlich und räumlich transformierte Funktion wird über

$$\tilde{f}(\omega,\vec{k}) \equiv \int f(t,\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3\vec{r} \tag{1}$$

definiert; die Rücktransformation lautet

$$f(t,\vec{r}) = \int \tilde{f}(\omega,\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\,\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}. \tag{2}$$

Diese Formeln gelten auch für eine vektorielle Funktion $\vec{g}(t,\vec{r})$ und ihre Fourier-Transformierte $\tilde{\vec{g}}(\omega,\vec{k})$.

**i. Mathematische Vorbereitungen: skalare Funktionen**

Sei zunächst $f(t,\vec{r})$ eine skalare Funktion von Zeit und Ort.

**a)** Drücken Sie die Fourier-Transformierte der Zeitableitung $\partial f(t,\vec{r})/\partial t$ durch $\tilde{f}(\omega,\vec{k})$ und $\omega$ aus.

**b)** Drücken Sie die Fourier-Transformierte des Gradienten $\vec{\nabla} f(t,\vec{r})$ durch $\tilde{f}(\omega,\vec{k})$ und $\vec{k}$ aus.

**ii. Mathematische Vorbereitungen: vektorielle Funktionen**

Sei nun $\vec{g}(t,\vec{r})$ eine vektorielle Funktion von Zeit und Ort.

**a)** Drücken Sie die Fourier-Transformierte der Zeitableitung $\partial\vec{g}(t,\vec{r})/\partial t$ durch $\tilde{\vec{g}}(\omega,\vec{k})$ und $\omega$ aus.

**b)** Drücken Sie die Fourier-Transformierten der Divergenz $\vec{\nabla}\cdot\vec{g}(t,\vec{r})$ und der Rotation $\vec{\nabla}\times\vec{g}(t,\vec{r})$ durch $\tilde{\vec{g}}(\omega,\vec{k})$ und $\vec{k}$ aus.

**c)** Drücken Sie die Fourier-Transformierte von der skalaren Funktion $\triangle f(t,\vec{r})$ durch $\tilde{f}(\omega,\vec{k})$ und $\vec{k}$ aus, wobei $\triangle$ den Laplace-Operator bezeichnet ($\triangle f = \vec{\nabla}^2 f = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f$).
Für eine vektorielle Funktion $\vec{g}(t,\vec{r})$ mit Komponenten auf einer Basis $g^i(t,\vec{r})$ ist der Laplace-Operator $\triangle\vec{g}(t,\vec{r})$ von $\vec{g}$ die vektorielle Funktion mit Komponenten $\triangle g^i(t,\vec{r})$.

**iii. Maxwell-Gleichungen**

Die Maxwell-Gleichungen für das elektromagnetische Feld $\big(\vec{E}(t,\vec{r}),\vec{B}(t,\vec{r})\big)$ in Anwesenheit einer Ladungsdichte $\rho(t,\vec{r})$ und einer Ladungsstromdichte $\vec{\jmath}(t,\vec{r})$ lauten

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(t,\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(t,\vec{r}) \tag{3a}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(t,\vec{r}) = 0 \tag{3b}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{r}) + \frac{\partial\vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t} = \vec{0} \tag{3c}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{r}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t} = \mu_0\vec{\jmath}(t,\vec{r}). \tag{3d}$$

Schreiben Sie die Maxwell-Gleichungen im Fourier-Raum, d.h. stellen Sie die Gleichungen zwischen den Fourier-transformierten Feldern $\tilde{\vec{E}}(\omega,\vec{k})$, $\tilde{\vec{B}}(\omega,\vec{k})$, $\tilde{\rho}(\omega,\vec{k})$ und $\tilde{\vec{\jmath}}(\omega,\vec{k})$ auf.

**iv. Maxwell-Gleichungen im Vakuum**

Sei angenommen, dass es keine Ladungen oder Ladungsstrom gibt, d.h. $\rho = 0$ und $\vec{\jmath} = \vec{0}$. Zeigen Sie, dass geeignete Kombinationen der Fourier-transformierten Gleichungen zur Gleichung

$$\vec{k}^{\,2}\tilde{\vec{E}}(\omega,\vec{k}) - \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\vec{E}}(\omega,\vec{k}) = \vec{0}$$

führen. (*Hinweis*: Dabei sollten Sie das doppelte Kreuzprodukt $\vec{k}\times\big[\vec{k}\times\tilde{\vec{E}}(\omega,\vec{k})\big]$ betrachten.)
Welcher Differentialgleichung in der Raumzeit — d.h. in $(t,\vec{r})$-Variablen — entspricht diese Gleichung?

**v. Elektrostatik**

In der Elektrostatik kann das statische elektrische Feld als $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$ mit $\Phi(\vec{r})$ einem elektrostatischen Potential geschrieben werden. Demzufolge wird die Maxwell–Gauß-Gleichung (3a) zur Poisson-Gleichung $\triangle\Phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})/\varepsilon_0$.

**a)** Sei angenommen, dass die einzige relevante Quelle des elektrischen Feldes eine Punktladung $q$ im Ursprung $\vec{r} = \vec{0}$ ist. Stellen Sie die Gleichung für das Fourier-transformierte Potential $\tilde{\Phi}(\vec{k})$ auf.

**b)** (Bonusfrage) Können Sie diese Gleichung lösen? (Sie kennen die Lösung!)