Übung Nr. 10

*34. Relativistisches Additionstheorem für gleichgerichtete Geschwindigkeiten

Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ zwei Inertialsysteme, in denen Koordinatensysteme mit parallelen Achsen gewählt werden, wobei $\mathcal{B}'$ sich relativ zu $\mathcal{B}$ mit der Geschwindigkeit $\vec{u} = u\,\vec{e}_1$ bewegt. Zur Zeit $t = t' = 0$ stimmen die Ursprünge der beiden Bezugssysteme überein.
Ein Massenpunkt P bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}\,' = v'\,\vec{e}_1$ bezüglich $\mathcal{B}'$. Das Ziel der Aufgabe ist, die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Massenpunktes relativ zu $\mathcal{B}$ zu bestimmen.

i. Geben Sie die Matrix der Lorentz-Transformation (Boost) an, die die Koordinaten x^μ eines Punkts der Raumzeit bzgl. $\mathcal{B}$ durch dessen Koordinaten $x^{\mu'}$ bzgl. $\mathcal{B}'$ ausdrücken.

ii. Sei der Einfachheit angenommen, dass der bewegte Massenpunkt P zur Zeit $t' = 0$ im Punkt $\vec{r}\,' = \vec{0}$ war. Indem Sie die Beziehung zwischen $x^{0'} = ct'$, $x^{1'}$ und v' sowie die Lorentz-Transformation aus **i.** benutzen, drücken Sie die Koordinate x^1 von P als Funktion von $x^0 = ct$ aus, und folgern Sie daraus die Beziehung

$$v = \frac{u + v'}{1 + \frac{uv'}{c^2}} \tag{1}$$

mit v dem Betrag von $\vec{v}$.

iii. Sei $\mathcal{B}_P$ das Inertialsystem, in dessen Ursprung der Massenpunkt P ruht; die Koordinatenachsen in $\mathcal{B}_P$ werden parallel zu den Achsen des Koordinatensystems in $\mathcal{B}$ genommen.
Geben sie die Matrix der Lorentz-Transformation von $\mathcal{B}_P$ nach $\mathcal{B}'$ an. Folgern Sie daraus die Matrix des Lorentz-Boosts von $\mathcal{B}_P$ nach $\mathcal{B}$. Wie können Sie aus der letzteren die gesuchte Geschwindigkeit v einfach lesen?

iv. Rapidität eines Lorentz-Boosts

Betrachten Sie noch einmal die spezielle Lorentz-Transformation aus **i.**. Die *Rapidität* ξ_u dieses Boosts wird durch

$$\xi_u \equiv \operatorname{artanh}\frac{u}{c} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}} \tag{2}$$

definiert.

a) Natürlich gilt $\tanh\xi_u = u/c \equiv \beta_u$. Drücken Sie noch $\cosh\xi_u$ und dann $\sinh\xi_u$ durch β_u und den damit assoziierten Lorentz-Faktor γ_u aus, indem Sie die Darstellung der Hyperbelfunktionen durch Exponentialfunktionen verwenden. Wie lässt sich die Matrix des Lorentz-Boosts aus **i.** schreiben?

b) Verwenden Sie die gleiche Idee wie in Frage **iii.** und die Additionstheoreme für Hyperbelfunktionen — vgl. Aufgabe **5**, Gl. (3) & (4) —, um zu zeigen, dass das relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten (1) äquivalent zum einfachen Theorem

$$\xi_v = \xi_u + \xi_{v'} \tag{3}$$

für die jeweiligen Rapiditäten ist.

v. Checken Sie ausgehend von Formel (1), dass die Vakuumlichtgeschwindigkeit in beiden Systemen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ als c gemessen wird.

35. δ-Distribution

i) Sei $\delta_\epsilon(x) \equiv \epsilon/[\pi(x^2+\epsilon^2)]$; prüfen Sie, dass δ_ϵ eine Darstellung der δ-Distribution ist. Insbesondere müssen Sie $\int \delta_\epsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$ zeigen.

ii) Für welchen Wert von α ist $\delta_\epsilon(x) \equiv \alpha\big[\delta(x+\epsilon) + \delta(x-\epsilon)\big]$ eine Darstellung der δ-Distribution?

iii) Gleiche Frage für $\delta_\epsilon \equiv \alpha\,\mathrm{e}^{-|x|/\epsilon}$.

iv) Welche Darstellung $\Theta_\epsilon(x)$ der Heaviside-Funktion $\Theta(x)$ lässt sich aus $\tanh(x)$ basteln? Leiten Sie daraus eine Darstellung δ_ϵ der δ-Distribution ab.

v) Für welchen Wert von α gilt $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \big[\delta(x+\epsilon) - \delta(x-\epsilon)\big] = \alpha\delta'(x)$?

vi) Betrachten Sie Polarkoordinaten (r, θ) in der Ebene. Für welche Funktion $\alpha(r, \theta)$ hat man die Gleichung $\delta^{(2)}(\mathbf{r}) = \alpha(r, \theta)\delta(r)$, mit $\mathbf{r}$ dem zweidimensionalen Ortsvektor?

vii) Betrachten Sie Kugelkoordinaten (r, θ, φ) im dreidimensionalen Raum. Für welche Funktion $\alpha(r, \theta, \varphi)$ hat man die Gleichung $\delta^{(3)}(\vec{r}) = \alpha(r, \theta, \varphi)\delta(r)$?

viii) Betrachten Sie nun Zylinderkoordinaten (r, θ, z) im dreidimensionalen Raum. Für welche Funktion $\alpha(r, \theta, z)$ hat man die Gleichung $\delta^{(3)}(\vec{r}) = \alpha(r, \theta, z)\delta(r)$?

36. Ladungsverteilungen

Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ für folgende Objekte mit Gesamtladung Q an:

i. eine homogen geladene Vollkugel mit Radius R;

ii. einen unendlich dünnen, homogen geladenen Draht, der zu einem Kreis mit Radius R gebogen ist;

iii. eine unendlich dünne, homogen geladene Kreisscheibe mit Radius R;

iv. einen homogen geladenen Hohlzylinder mit Innenradius R_1, Außenradius R_2 und Höhe h.