

Übung Nr. 8

Diskussionsthema: Lagrange-Formulierung der klassischen Elektrodynamik

23. Alternative Lagrange-Dichte für das elektromagnetische Feld

Sei

$$\mathcal{L}'_{\text{F,M+F}}[A_\nu, \partial_\mu A_\nu] = -\frac{1}{2\mu_0}(\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu) - j_\mu A^\mu,$$

die Lagrange-Dichte für ein Vektorfeld $A^\mu(\mathbf{x})$, das mit einem festen Viererstrom $j^\mu(\mathbf{x})$ wechselwirkt. Bestimmen Sie die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen ($\mathcal{EL}1$). Vergleichen Sie das Resultat mit den Gleichungen ($\mathcal{EL}2$), die aus der Standard-Lagrange-Dichte für das elektromagnetische Feld folgen. Unter welcher Bedingung stimmen die Gleichungen ($\mathcal{EL}1$) und ($\mathcal{EL}2$) zusammen?

24. Massives Vektorfeld. Proca-Gleichung

Ein Vektorfeld $A^\mu(\mathbf{x})$ sei beschrieben durch die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}[A_\mu, \partial_\nu A_\mu] = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2 c^2}{2\mu_0 \hbar^2}A_\mu A^\mu - j_\mu A^\mu, \quad (1)$$

mit $F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \partial^\mu A^\nu(\mathbf{x}) - \partial^\nu A^\mu(\mathbf{x})$, m einer Konstante, und $j^\mu(\mathbf{x})$ einem festen äußeren Strom.

i. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen („Proca-Gleichungen“) für das Feld $A^\mu(\mathbf{x})$. Wie ändern sich die Maxwell-Gleichungen? Sind die Proca-Gleichungen eichinvariant?

ii. Zeigen Sie, dass bei erhaltenem Strom die Proca-Gleichungen zu

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right)A^\mu(\mathbf{x}) = \mu_0 j^\mu(\mathbf{x})$$

werden. Welcher Bedingung genügen die entsprechenden ebenen Wellen? Was ist die physikalische Bedeutung von m ?

25. Experimentelle Grenzen für die Masse des Photons

Die Lagrange-Dichte (1) beschreibt ein massives Photon (Lichtquant).¹ In dieser Aufgabe werden Grenzen für die Masse dieses Photons hergeleitet.

i. Was wird die Maxwell-Gauß-Gleichung in Anwesenheit des Massenterms (vgl. Übung 24 **i.**)?

ii. Eine perfekt leitende leere Kugel mit dem Radius a sei unter einer Spannung V gleichförmig geladen. Welche Werte nehmen das Potential A^0 und das elektrische Feld innerhalb der Kugel an, wenn $m = 0$? Wenden Sie den Gauß'schen Satz auf die in **i.** erhaltene Gleichung an, um das elektrische Feld und danach das skalare Potential innerhalb der Kugel zur führenden Ordnung in m für $m \neq 0$ zu berechnen.

iii. Eine nicht-geladene leitende Kugel mit dem Radius b wird innerhalb der obigen Kugel eingesetzt, und die relative Potentialspannung $\Delta V/V$ zwischen den zwei Kugeln wird mithilfe eines Galvanometers gemessen. Der neueste Experimentalversuch² liefert $\Delta V/V < 4 \cdot 10^{-16}$ für $a = 1,5$ m und $b = 1$ m. Bestimmen Sie die obere Grenze für die Masse des Photons, die aus diesem Experiment folgt.

¹Genauer: die elementaren Anregungen des quantisierten Vektorfelds $\hat{A}^\mu(\mathbf{x})$ beschrieben durch Gl. (1) sind massive Photonen.

²Williams, Faller & Hill, Phys. Rev. Lett. **26** (1971) 721.