Übung Nr. 7

Diskussionsthema: Lorentz-kovariante Formulierung der klassischen Elektrodynamik

19. Hydrodynamik eines idealen relativistischen Fluids

Zeigen Sie, dass die Multiplikation des Projektors $\eta_{\rho\nu} - u_\rho(\mathsf{x})u_\nu(\mathsf{x})/c^2$ mit der Energieimpulsbilanzgleichung $\partial_\mu T^{\mu\nu}(\mathsf{x}) = 0$ für ein ideales Fluid zur Identität

$$-\partial_\rho \mathcal{P}(\mathsf{x}) + \frac{u_\rho(\mathsf{x})u^\mu(\mathsf{x})}{c^2}\partial_\mu \mathcal{P}(\mathsf{x}) + \frac{\epsilon(\mathsf{x}) + \mathcal{P}(\mathsf{x})}{c^2}u^\mu(\mathsf{x})\partial_\mu u_\rho(\mathsf{x}) = 0$$

führt.

20. Ebene elektromagnetische Welle

Eine linear polarisierte ebene Welle ist definitionsgemäß eine Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum der Form

$$A^\mu(\mathsf{x}) = \varepsilon^\mu f(n_\mu x^\mu),$$

mit ε^μ, n^μ x-unabhängigen Vierervektoren und f einer skalaren Funktion. Dieser Ausdruck von $A^\mu(\mathsf{x})$ ist Lorentz-kovariant.

i. Wie lautet der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}(\mathsf{x})$?

ii. Überprüfen Sie, dass die Transformation $\varepsilon^\mu \to \varepsilon^\mu + \lambda n^\mu$ mit beliebigem $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Eichtransformation ist.

iii. Geben Sie den Ausdruck der Maxwell-Gleichungen im Vakuum an. Zeigen Sie, dass die Lösungen für $n_\mu n^\mu \neq 0$ sogenannte „reine Eichungen“ sind, d.h. sie können durch eine Eichtransformation in $A^\mu(\mathsf{x}) = 0$ wegtransformiert werden.

iv. Sei nunmehr $n_\mu n^\mu = 0$. Zeigen Sie, dass das Feld der Lorenz-Eichbedingung automatisch genügt, obwohl die Eichung noch nicht fixiert wurde.

v. Zeigen Sie, dass $\varepsilon_\mu \varepsilon^\mu < 0$ für ein Feld gilt, das keine reine Eichung ist.
Folglich kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\epsilon_\mu \epsilon^\mu = -1$ ansetzen.

vi. Zeigen Sie, dass es möglich ist, durch eine Eichtransformation $\epsilon^0 = 0$ anzusetzen. Welcher Eichung entspricht diese (nicht-kovariante) Bedingung? Zeigen Sie, dass n^0 zu 1 normiert werden kann und überprüfen Sie, dass man die bekannte Form von $\phi(t, \vec{x})$ und $\vec{A}(t, \vec{x})$ für eine transversal polarisierte ebene Welle erhält.

21. Ladung als Lorentz-Skalar

Für den Viererstrom $j^\mu(x)$ gilt die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu(\mathsf{x}) = 0$. Zeigen Sie, dass dann die Größe $q = \int c^{-1} j^0(\mathsf{x})\, \mathrm{d}^3\vec{r}$ ein Lorentz-Skalar ist. Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass q in der Form

$$q = \frac{1}{c}\int_{x^0=\text{const.}} j^\mu(\mathsf{x})\, \mathrm{d}^3\sigma_\mu$$

umschrieben werden kann, wobei

$$\mathrm{d}^3\sigma_\mu = \frac{1}{6}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, \mathrm{d}^3\tau^{\nu\rho\sigma}$$

ein Vierervektor ist und $\mathrm{d}^3\tau^{\nu\rho\sigma}$ ein antisymmetrischer Tensor, der durch die Zuweisungen

$$\mathrm{d}^3\tau^{012} = \mathrm{d}x^0\, \mathrm{d}x^1\, \mathrm{d}x^2, \quad \mathrm{d}^3\tau^{021} = -\mathrm{d}x^0\, \mathrm{d}x^2\, \mathrm{d}x^1, \quad \text{usw.}$$

mit $x^0 = ct$ festgelegt ist. Damit stellen die $\mathrm{d}^3\tau^{\nu\rho\sigma}$ dreidimensionale Hyperflächenelemente des Minkowski-Raums dar.

22. Levi-Civita-Tensor

Beweisen die folgenden Gleichungen, indem Sie die Konstanten N_1, N_2, N_3 berechnen

$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = N_1$

$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} = N_2\delta^\alpha_\mu$

$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} = N_3\big(\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu - \delta^\beta_\mu\delta^\alpha_\nu\big).$