Übung Nr. 6

Diskussionsthema: Grundgesetze der relativistischen Hydrodynamik

16. Energieimpulstensor

Zeigen Sie mithilfe einer Lorentz-Transformation, dass der Energieimpulstensor eines idealen Fluids in einem festen Bezugssystem, relativ zu dem das lokale Ruhesystem des Fluids sich mit der Geschwindigkeit $\vec{\mathsf{v}}$ bewegt, zur Ordnung $\mathcal{O}(|\vec{\mathsf{v}}|/c)$ gegeben ist durch

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \epsilon & (\epsilon+\mathcal{P})\frac{\mathsf{v}_x}{c} & (\epsilon+\mathcal{P})\frac{\mathsf{v}_y}{c} & (\epsilon+\mathcal{P})\frac{\mathsf{v}_z}{c} \\ (\epsilon+\mathcal{P})\frac{\mathsf{v}_x}{c} & \mathcal{P} & 0 & 0 \\ (\epsilon+\mathcal{P})\frac{\mathsf{v}_y}{c} & 0 & \mathcal{P} & 0 \\ (\epsilon+\mathcal{P})\frac{\mathsf{v}_z}{c} & 0 & 0 & \mathcal{P} \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie dieses Resultat mit der in der Vorlesung gegebenen allgemeinen Formel für $T^{\mu\nu}$ nach.

17. Isentropische Strömung

Sei s bzw. n die Entropie- bzw. Teilchendichte, und u^μ die Strömungsgeschwindigkeit. Wir definieren die Entropie pro Teilchen durch $s/n = S/N$. Zeigen Sie, dass in einer isentropischen Strömung $[\partial_\mu(su^\mu) = 0]$ die Entropie pro Teilchen erhalten bleibt, d.h. $\mathrm{d}(s/n)/\mathrm{d}t = 0$.

18. Schallgeschwindigkeit in ultrarelativistischer Materie

Wir betrachten ein ideales Fluid mit dem Energieimpulstensor $T^{\mu\nu} = -\mathcal{P}\eta^{\mu\nu} + (\epsilon+\mathcal{P})u^\mu u^\nu/c^2$. Es sei angenommen, dass es keine thermodynamisch relevante erhaltene Teilchenzahl gibt, so dass die Energiedichte ϵ als Funktion von nur einer thermodynamischen Größe ausgedrückt werden kann, z.B. $\epsilon = \epsilon(\mathcal{P})$.

i. Leiten Sie, ausgehend von der Energieimpulserhaltung $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, den Ausdruck

$$c_s^2 = \frac{c^2}{\mathrm{d}\epsilon/\mathrm{d}\mathcal{P}}$$

für die Schallgeschwindigkeit her.

Hinweis: Linearisierung für kleine Auslenkungen von $\mathcal{P}$, ϵ und v um einen ruhenden Hintergrund.

ii. Betrachten wir eine Substanz dessen Zustandsgleichung durch das Stefan–Boltzmann-Gesetz[1]

$$\mathcal{P} = \frac{g\pi^2}{90}\frac{(k_\mathrm{B}T)^4}{(\hbar c)^3}$$

gegeben wird, wobei g die Zahl der Freiheitsgrade bezeichnet (z.B. ist $g = 2$ für die Schwarzkörperstrahlung). Bestimmen Sie c_s in diesem Fall.

Hinweis: Die Gibbs–Duhem Relation kann nützlich sein...

[1]Sie können diese Gelegenheit nutzen, um ihre Kenntnisse über die Thermodynamik bzw. statistische Physik relativistischer Systeme aufzufrischen. Können Sie insbesondere erklären, warum Quanteneffekte in solchen Systemen nie vernachlassigbär sind — was sich im Nachhinein an der Anwesenheit von $\hbar$ in der Zustandsgleichung erkennen lässt?