

## Übung Nr. 5

**Diskussionsthema:** Ähnlichkeitsgesetz & dimensionslose Zahlen der Fluidodynamik.

### 13. Taylor–Couette–Strömung. Messung der Scherviskosität

In einem Couette-Viskosimeter befindet sich eine zu messende viskose Flüssigkeit in einem Ringspalt zwischen zwei konzentrischen Zylindern mit der Höhe  $L$ : der äußere Zylinder (Radius  $R_2$ ) rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega_2$ , während der Innenzylinder (Radius  $R_1$ ) still bleibt. Die Strömung der Flüssigkeit wird zweidimensional, inkompressibel und stationär angenommen.

- i. Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung zu  $v_r = 0$  führt, wobei  $v_r$  die Radialkomponente (in einem Zylinderkoordinatensystem) der Strömungsgeschwindigkeit bezeichnet.
- ii. Zeigen Sie, dass die Navier–Stokes-Gleichung die Gleichungen

$$\frac{v_\varphi(r)^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}(r)}{\partial r} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 v_\varphi(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi(r)}{\partial r} - \frac{v_\varphi(r)}{r^2} = 0 \quad (2)$$

liefert. Was ist die Bedeutung der Gl. (1)? Lösen Sie die Gl. (2) mit dem Ansatz  $v_\varphi(r) = ar + \frac{b}{r}$ .

- iii. Man kann zeigen, dass die  $r\varphi$ -Komponente des Spannungstensors durch

$$\sigma_{r\varphi} = \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right)$$

gegeben wird. Zeigen Sie, dass  $\sigma_{r\varphi} = -\frac{2b\eta}{r^2}$ , wobei  $b$  derselbe Koeffizient wie oben ist.

- iv. An der Wand des Innenzylinders wird ein Drehmoment  $\mathcal{M}_z$  gemessen. Wie ergibt sich die Scherviskosität  $\eta$  aus dieser Messung?

Numerisches Beispiel: es seien  $R_1 = 10$  cm,  $R_2 = 11$  cm,  $L = 10$  cm,  $\Omega_2 = 10$  rad·s<sup>-1</sup> und  $\mathcal{M}_z = 7,246 \cdot 10^{-3}$  N·m.

### 14. Strömung an einer oszillierenden Wand (Zweites Stokes'sches Problem)

Es sei eine unendlich ausgedehnte ebene Wand ( $y = 0$ ), die einer Schwingungsbewegung mit der Geschwindigkeit  $U \cos(\omega t) \vec{e}_x$  unterliegt. Im Bereich  $y > 0$  befindet sich ein inkompressibles Newtonsches Fluid mit der kinematischen Scherviskosität  $\nu$ . Wir nehmen an, dass Volumenkräfte vernachlässigbar sind, dass der Druck gleichförmig und stationär bleibt, und dass die durch die Schwingungen induzierte Strömung des Fluids von der  $x$ -Koordinate nicht abhängt.

- i. Bestimmen Sie die Strömungsgeschwindigkeit  $v(t, y)$  und plotten Sie das Resultat.
- ii. Was ist die charakteristische Dicke der mitschwingenden Fluidschicht in der Nähe der Wand? Kommentieren Sie das Ergebnis.

### 15. Ähnlichkeitsbetrachtungen bei der Strömung in Röhren

Der Zusammenhang zwischen dem Druckgefälle pro Längeneinheit  $\Delta \mathcal{P}/L$  und der mittleren Strömungsgeschwindigkeit  $\langle v \rangle$  werde für ein gegebenes Rohr und ein bestimmtes Fluid gegeben durch

$$\frac{\Delta \mathcal{P}}{L} = C \langle v \rangle^n,$$

wobei  $C$  eine Größe ist, die von der Massendichte  $\rho$ , der kinematischen Scherviskosität  $\nu$  und dem Rohrradius  $a$  abhängen kann.  $n$  ist eine Zahl, die vom Strömungszustand abhängt:  $n = 1$  für den laminaren Strömungszustand (Hagen–Poiseuille-Gesetz, vgl. Vorlesung),  $n = 1,75$  bzw.  $n = 1,722$  für den turbulenten Strömungszustand nach Hagen (1854) bzw. Reynolds (1883).

Unter der Annahme, dass  $C$  ein Produkt von Potenzen von  $\rho$ ,  $\nu$  und  $a$  ist, bestimmen Sie die Exponenten dieser Potenzen aus einer Dimensionsbetrachtung.