Übung Nr. 4

Diskussionsthema: Grundgleichungen der Dynamik eines nicht-relativistischen Newtonschen Fluids.

10. Eindimensionale Ähnlichkeitsströmung

Im Bereich $x \geq 0$ ruht ein ideales Fluid mit Druck $\mathcal{P}_0$ und Massendichte ρ_0; der Bereich $x < 0$ ist leer ($\mathcal{P} = 0$, $\rho = 0$). Die adiabatische Zustandsgleichung des Fluids sei der Form

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \qquad \text{mit } \gamma > 1,$$

woraus die Schallgeschwindigkeit durch $c_s^2(\rho) = \partial\mathcal{P}/\partial\rho$ bestimmt werden kann. Am Zeitpunkt $t = 0$ wird der Behälter des Fluids geöffnet und das Fluid strömt in den Bereich $x < 0$ ein. Das Ziel der Aufgabe ist, die Strömungsgeschwindigkeit $\mathsf{v}(t, x)$ für $t > 0$ zu bestimmen.

i. Wir nehmen an, dass alle Abhängigkeit von x und t in der Kombination $u \equiv x/t$ auftritt. Zeigen Sie, dass die Kontinuitäts- und Euler-Gleichungen die folgenden Formen erhalten:

$$\begin{aligned} \big[u - \mathsf{v}(u)\big]\,\rho'(u) &= \rho(u)\,\mathsf{v}'(u) \\ \rho(u)\big[u - \mathsf{v}(u)\big]\,\mathsf{v}'(u) &= c_s^2(\rho(u))\,\rho'(u), \end{aligned}$$

wobei ρ' bzw. v' die Ableitung von ρ bzw. v nach u bezeichnet.

ii. Zeigen Sie, dass die Strömungsgeschwindigkeit entweder die Gleichung $u - \mathsf{v}(u) = c_s(\rho(u))$ erfüllt oder konstant ist, wobei im ersten Fall die Schallgeschwindigkeit die Form $c_s^2(\rho) = c_s^2(\rho_0)(\rho/\rho_0)^{\gamma-1}$ hat.

iii. Leiten Sie aus den Ergebnissen von **i.** und **ii.** zuerst die Beziehung

$$\mathsf{v}(u) = a + \frac{2}{\gamma - 1}\,c_s(\rho(u))$$

her, wobei a eine Konstante ist, dessen Wert durch die Bedingung fixiert wird, dass $\mathsf{v}(u)$ innerhalb des Fluids stetig sei. Zeigen Sie letztendlich, dass in einem bestimmten u-Bereich der Betrag von v gegeben wird durch

$$|\mathsf{v}(u)| = \frac{2}{\gamma + 1}\big[c_s(\rho_0) - u\big].$$

iv. Skizzieren Sie die Massendichte $\rho(u)$ sowie die Stromlinien $x(t)$ und zeigen Sie, dass die Information über die Eröffnung des Behälters links mit der Geschwindigkeit $2c_s(\rho_0)/(\gamma - 1)$ propagiert, während sie sich rechts mit der Schallgeschwindigkeit $c_s(\rho)$ bewegt.

11. Wärmediffusion und Dämpfung

In der Vorlesung (07.05) wurde die Gleichung

$$\frac{\partial e(t, \vec{r})}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \big[\kappa(t, \vec{r})\vec{\nabla}T(t, \vec{r})\big]$$

hergeleitet, wobei κ die Wärmeleitfähigkeit bezeichnet. Seien $C \equiv \partial e/\partial T$ und κ Konstanten und $\chi \equiv \kappa/C$. Lösen Sie $T(t, \vec{r})$ für $z < 0$ mit der Randbedingung, dass auf der Ebene $z = 0$ die Temperatur räumlich konstant ist und die Zeitabhängigkeit $T = T_0 \cos(\omega t)$ aufweist. In welcher Tiefe sind die Wärmeschwankungen 10 % derjenigen auf der Ebene $z = 0$?

12. Wiederholung zur Speziellen Relativitätstheorie

i. Die 4-Beschleunigung eines Punktteilchens mit 4-Geschwindigkeit u sei definiert durch

$$a^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau},$$

wobei τ die Eigenzeit bezeichnet. Zeigen Sie, dass das 4-Skalarprodukt $\mathsf{a} \cdot \mathsf{u}$ verschwindet.

ii. Das Teilchen bewege sich in x^3-Richtung. Drücken Sie die Komponenten a^μ der 4-Beschleunigung im Bezugssystem, in dem das Teilchen ruht, durch die gewöhnliche 3-Beschleunigung $\vec{w}$ aus. Zeigen Sie, dass $a_\mu a^\mu = -\vec{w}^2$ gilt.

iii. Bestimmen Sie jetzt die Bahnkurve $x^3(t)$ (bzgl. eines festen Bezugssystems) eines Punktteilchens, das sich mit einer konstanten Beschleunigung $\vec{w}$ (bzgl. des momentanen Ruhesystems) in x^3-Richtung bewegt. Es sei $x^3 = \mathrm{d}x^3/\mathrm{d}t = 0$ zur Zeit $t = 0$.

iv. Um einen längeren Raumflug zu einem angenehmen Erlebnis zu machen, sollte man nicht auf die gewöhnliche Schwerkraft verzichten und in einem Raumschiff mit der konstanten Beschleunigung $w = 9,8\ \mathrm{m.s}^{-2}$ reisen. Wie lange dauert eine Reise zur Andromedagalaxie (Entfernung $2,5 \cdot 10^6$ Lichtjahre) für die Reisenden?