Übung Nr. 3

Diskussionsthema: Schallwellen in einem Fluid.

7. Zweidimensionale Potentialströmung. Teekanneneffekt

Betrachten Sie eine inkompressible zweidimensionale Potentialströmung mit der Strömungsgeschwindigkeit $\vec{\mathsf{v}}(t,\vec{r}) = \vec{\mathsf{v}}(t,x,y)$. Es seien $\varphi(t,x,y)$ das Geschwindigkeitspotential ($\vec{\mathsf{v}} = -\vec{\nabla}\varphi$) und $\psi(t,x,y)$ die sogenannte „Strömungsfunktion" ($\mathsf{v}_x = -\partial_y\psi$, $\mathsf{v}_y = \partial_x\psi$). Eine komplexe Variable z sei definiert durch $z = x + \mathrm{i}y$.

i. Zeigen Sie, dass das durch $w = \phi + \mathrm{i}\psi$ definierte komplexe Potential eine analytische Funktion von z ist, indem Sie die Gültigkeit der Cauchy–Riemannschen partiellen Differentialgleichungen nachprüfen.

ii. Zeigen Sie, dass die Strömungsfunktion der Laplace-Gleichung genügt, und dass die Kurven $\psi(t,x,y) =$ Konstante die Stromlinien der Strömung sind.

iii. Zeigen Sie, dass $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = -\mathsf{v}_x + \mathrm{i}\mathsf{v}_y$.

iv. Betrachten Sie das komplexe Potential $w(z) = Az^n$ mit reellem A und $n \geq 1/2$. Zeigen Sie, dass Sie mit diesem Potential die Strömung an der Ecke $\widehat{\mathcal{E}}$ zwischen zwei Wänden, die den Winkel $\alpha = \pi/n$ einschließen, beschreiben können.

Hinweis: Landau–Lifschitz, Hydrodynamik, § 10.

v. Was können Sie über die Geschwindigkeit in der Näherung der Ecke $\widehat{\mathcal{E}}$ sagen?

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $\alpha < \pi$ und $\alpha > \pi$.

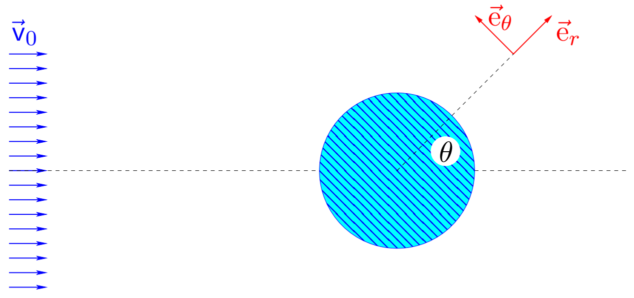
vi. Teekanneneffekt Wenn man eine Flüssigkeit aus einer Kanne „vorsichtig" ausgießen will, beobachtet man, dass die Flüssigkeit an der Unterseite der Tülle fließt, statt nach unten zu fallen. Erklären Sie dieses Phänomen mithilfe des oben dargestellten Modells einer Strömung (im Fall $\alpha > \pi$) und der Bernoulli-Gleichung.

Literatur: Jearl Walker, Scientific American, Okt. 1984 oder Spektrum der Wissenschaft, Feb. 1985.

vii. Falls die Strömung eines Flusses mit dem oben eingeführten Potential modelliert wird, welche qualitative Entwicklung kann für das Ufer vorgesehen werden?

8. Potentialströmung mit einem Wirbel. Magnus-Effekt

Das Ziel dieser Aufgabe ist, ein vereinfachtes quantitatives Modell für den in der Vorlesung erwähnten Magnus-Effekt zu diskutieren.



Man kann zeigen (s. Landau–Lifschitz, Hydrodynamik, § 10), dass die Strömungsgeschwindigkeit eines inkompressiblen idealen Fluids um einen *ruhenden* Zylinder mit dem Radius R, mit dem asymptotischen gleichförmigen Verhalten $\vec{\mathsf{v}}(\vec{r}) = \vec{\mathsf{v}}_0$ weit vom Zylinder, gegeben ist durch

$$\mathsf{v}_r(r,\theta) = \mathsf{v}_0 \cos\theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right), \qquad \mathsf{v}_\theta(r,\theta) = -\mathsf{v}_0 \sin\theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right), \tag{1}$$

wobei Zylinderkoordinaten (r,θ) benutzt werden (s. Abbildung), mit dem Koordinatenursprung im Zentrum des Zylinders.

Auf das Geschwindigkeitsfeld (1) wird ein Wirbel mit der Zirkulation Γ, entsprechend einem Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{\mathsf{v}}(r,\theta) = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\vec{\mathrm{e}}_\theta}{r}, \tag{2}$$

überlagert.

i. Sei $C \equiv \Gamma/(4\pi R \mathsf{v}_0)$. Bestimmen Sie die Punkte mit verschwindender Geschwindigkeit für die aus der Überlagerung von (1) und (2) resultierende Strömung.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $C < 1$ und $C > 1$.

ii. Wie sehen in jedem Fall die Stromlinien aus? Diskutieren Sie die physikalische Bedeutung des Resultats.

iii. Drücken Sie die Kraft pro Längeneinheit $\mathrm{d}\vec{F}/\mathrm{d}z$, der der Zylinder in der Strömung (1)+(2) unterliegt, in Abhängigkeit von Γ, v_0 und der Massendichte ρ des Fluids aus.

9. Unviskose Burgers-Gleichung

Falls in der eindimensionalen Euler-Gleichung der Druck vernachlässigt wird, ergibt sich die sogenannte *unviskose Burgers-Gleichung*

$$\frac{\partial \mathsf{v}(t,x)}{\partial t} + \mathsf{v}(t,x)\frac{\partial \mathsf{v}(t,x)}{\partial x} = 0.$$

i. Zeigen Sie, dass die Lösung durch die implizite Gleichung $\mathsf{v}(0,x) = \mathsf{v}(t, x + v(0,x)\,t)$ gegeben wird, wobei $\mathsf{v}(0,x)$ die Anfangsbedingung darstellt.

Hinweis: `http://en.wikipedia.org/wiki/Burgers'_equation`

ii. Sei $\mathsf{v}(0,x) = \mathsf{v}_0\,\mathrm{e}^{-(x/x_0)^2}$ die Anfangsbedingung, mit v_0 und x_0 zwei Konstanten. Zeigen Sie, dass am Zeitpunkt $t = \sqrt{\mathrm{e}/2}\,x_0/\mathsf{v}_0$ eine Unstetigkeit entsteht, und zwar vorerst bei $x = x_0\sqrt{2}$.