

Übung Nr. 2

Diskussionsthemen:

- Grundgleichungen der Dynamik eines idealen nicht-relativistischen Fluids;
- Bernoulli-Gleichung und Anwendungsbeispiele.

4. Rotierende Flüssigkeit im Schwerfeld

Berechnen Sie die Form der freien Oberfläche einer inkompressiblen idealen Flüssigkeit in einem zylindrischen senkrechten Gefäß im Schwerfeld, das sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_3$ um die eigene Achse dreht. Es wird angenommen, dass die Flüssigkeit mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit mitrotiert.

Hinweis: Landau–Lifschitz, Hydrodynamik §10.

5. Differentielle Form des Thomsonschen Satzes

Die Bezeichnung der Aufgabe wird nach der Vorlesung des 23.04 klarer werden. Zur Lösung der Aufgabe ist der Inhalt jener Vorlesung aber nicht nötig.

- i. Ein ideales Fluid sei dem Schwerfeld ausgesetzt. Zeigen Sie, dass die Wirblichkeit $\vec{\omega}(t, \vec{r})$ der Gleichung

$$\frac{\partial \vec{\omega}(t, \vec{r})}{\partial t} = \vec{\nabla} \times [\vec{v}(t, \vec{r}) \times \vec{\omega}(t, \vec{r})]$$

genügt.

Hinweis: Benutzen Sie die Erhaltung der Entropie pro Teilchen, um den Druckterm der Euler-Gleichung umzuformen.

- ii. **Stationärer „Wirbel“:** Sei eine Strömung der Form $\vec{\omega}(t, \vec{r}) = A \delta(x_1) \delta(x_2) \vec{e}_3$ mit A einer Konstante. Bestimmen Sie die entsprechende Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}(t, \vec{r})$.

Hinweis: Verwenden Sie Symmetrieargumente und den Stokes'schen Satz. Die Maxwell–Ampère-Gleichung der Magnetostatik liefert eine nützliche formale Analogie.

6. Modell eines Sterns

In einem vereinfachten Modell wird die Sternmaterie als ein in einer Kugel kondensiertes Fluid (ein Plasma) mit der gleichförmigen Massendichte ρ modelliert. Es wird angenommen, dass dieses Fluid unter dem Einfluss des Drucks \mathcal{P} und der Schwerkraft im Gleichgewicht ist.

- i. Berechnen Sie das Gravitationsfeld in einem Abstand r vom Sternzentrum.
- ii. Schreiben Sie die Gleichgewichtsgleichung des Fluids unter der Annahme, dass der kinetische Druck nur von r abhängt, und bestimmen Sie die Funktion $\mathcal{P}(r)$. Bestimmen Sie den Druck im Sternzentrum in Abhängigkeit von der Masse M und dem Radius R des Sterns. Berechnen Sie den numerischen Wert des Drucks im vereinfachten Modell für $M = 2 \cdot 10^{30}$ kg (Sonnenmasse) und $R = 7 \cdot 10^8$ m (Sonnenradius).
- iii. Es wird angenommen, dass die Sternmaterie aus einem elektrisch neutralen Gemisch (Plasma) von Wasserstoffkernen und Elektronen besteht. Zeigen Sie, dass die Größenordnung der gesamten Teilchendichte des Plasmas $n \approx 2\rho/m_p$ ist, mit m_p der Masse eines Protons. Berechnen Sie eine Größenordnung für die Temperatur im Zentrum der Sonne.

Hinweis: $m_p = 1,6 \cdot 10^{-27}$ kg; $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J·K⁻¹.