Übung Nr. 13

Diskussionsthema: Phasengeschwindigkeit, Gruppengeschwindigkeit

38. Resonanzfläche

Die relative dielektrische Funktion des Lorentz–Drude-Modells mit einer einzigen Resonanz kann in der alternativen Form

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{c_0\omega_0}{\omega_0^2 - (\omega + \mathrm{i}\gamma)^2}$$

geschrieben werden. Zeigen Sie, dass die Fläche F unter der „Spektralfunktion" $\mathrm{Im}\,\epsilon_r(\omega)$

$$F \equiv \int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} \mathrm{Im}\,\epsilon_r(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

im Limes $\gamma \to 0$ unabhängig von ω_0, γ und $\Delta\omega$ ist.

Hinweis: Erinnern Sie sich an verschiedene Darstellungen der Dirac-Distribution $\delta(x)$.

39. Debye-Abschirmung

Wenn eine Ladung $+Ze$ am Ort $\vec{x}_0$ sitzt, genügt das elektrische Potential Φ in einem elektromagnetischen Plasma der Gleichung

$$\big(-\triangle + k_\mathrm{D}^2\big)\Phi(\vec{r}) = \frac{Ze}{\epsilon_0}\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_0),$$

wobei k_D^2 das Debye-Wellenvektor-Quadrat bezeichnet. Zeigen Sie, dass die Lösung die Form

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\mathrm{e}^{-k_\mathrm{D}|\vec{r}-\vec{x}_0|}}{r}$$

hat.

Hinweis: Eine Möglichkeit wäre, die Gleichung zuerst im Fourier-Raum zu lösen und dann zurückzutransformieren.

40. Plasmawellen

Im Limes $\Gamma \to 0$ hat die relative dielektrische Funktion aus Aufgabe **36** vom Blatt 12 die Form $\epsilon_r(\omega) = 1 - \Omega^2/\omega^2$. Sei außerdem $\mu(\omega) = \mu_0$.

i. Zeigen Sie, dass dies zur Dispersionsrelation $\omega^2 = \Omega^2 + c^2\vec{k}^2$ führt.

ii. Skizzieren Sie die Verläufe der Phasengeschwindigkeit $v_P = \omega/k$ und der Gruppengeschwindigkeit $v_G = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$ als Funktionen von ω und erläutern Sie die physikalischen Bedeutungen der Ergebnisse.

iii. Welche $\epsilon_r(\omega)$ bzw. $\mu(\omega)$ würde der Dispersionsrelation $\omega^2 = \omega_P^2 + c_s^2\vec{k}^2$ entsprechen?