

Übung Nr. 12

Diskussionsthema: Elektromagnetische Wellen in Materie (Wellengleichung & Phasengeschwindigkeit; frequenzabhängige konstitutive Gleichungen; Dispersion & Absorption)

35. Felder an Grenzflächen zwischen Materialien

Wir wollen das Verhalten von elektrischen und magnetischen Feldern an Grenzflächen zwischen Materialien mit verschiedenen Permittivitäten und Permeabilitäten untersuchen. Dabei nehmen wir an, dass die frei beweglichen Ladungs- und Stromdichten an den Grenzflächen verschwinden.

- i. Geben Sie die Stetigkeitsbedingungen für die Tangential- bzw. Normalkomponenten der Felder \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} und \vec{H} an einer Grenzfläche zwischen verschiedenen Materialien an.
- ii. Leiten Sie aus den Stetigkeitsbedingungen die „Brechungsgesetze“ für die elektrischen bzw. magnetischen Feldlinien an Grenzflächen her.

36. Elektromagnetische Wellen in einem Metall

Betrachtet wird ein Metall mit der relativen dielektrischen Funktion

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega(\omega + i\Gamma)}$$

und der konstanten Permeabilität $\mu(\omega) = \mu_0$. Keine externen Ladungen sind vorhanden: $\rho_{\text{ext}} = 0$, $\vec{J}_{\text{ext}} = \vec{0}$.

- i. Sei zuerst $\Gamma \ll \Omega \ll \omega$. Zeigen Sie, dass der Brechungsindex $n = n' + in''$ in diesem Bereich reell ist, mit $n' \approx 1$. (Physikalisch bedeutet dies, dass das Metall im ultravioletten Bereich *transparent* ist.)
- ii. Sei jetzt $\Gamma \ll \omega \ll \Omega$. Zeigen Sie, dass der Brechungsindex $n = n' + in''$ in diesem Bereich rein imaginär ist. (Physikalisch bedeutet dies, dass keine Wellenbewegung stattfinden kann und dass das Metall das Licht vollständig *reflektiert*, d.h. als Spiegel funktioniert.)
- iii. Letztendlich wird der Fall $\omega \ll \Gamma \ll \Omega$ betrachtet. Eine elektromagnetische Welle bewege sich in die positive z -Richtung. Zeigen Sie, dass ihr Betrag als $|\vec{E}| \sim \exp(-z/d_{\text{skin}})$ gedämpft wird, mit $d_{\text{skin}} = c/\sqrt{\sigma\omega/2\epsilon_0}$, wobei $\sigma = \epsilon_0\Omega^2/\Gamma$ die Leitfähigkeit ist. Dieser Effekt heißt *Skinneffekt*.

37. Telegraphengleichung

Sei $\epsilon_r(\omega) = \epsilon_{r,0} - \Omega^2/i\omega\Gamma$ und $\mu(\omega) = \mu_r\mu_0$. Zeigen Sie, dass die elektrische Feldstärke die sogenannte Telegraphengleichung erfüllt:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_{\text{eff}}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{\mu_r \sigma}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{r})}{\partial t},$$

wobei $c_{\text{eff}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{r,0}\mu_r}}$ und $\sigma = \epsilon_0 \frac{\Omega^2}{\Gamma}$.

Ursprünglich wurde diese Gleichung zur Beschreibung der Fortpflanzung von Telegraphiesignalen auf Seekabeln eingeführt.