Übung Nr. 11

Diskussionsthemen:
– Magnetismus in Materie
– Maxwell-Gleichungen in Materie

32. Homogen magnetisierte Kugel

Betrachten Sie eine Kugel mit Radius R und homogener Magnetisierung $\vec{M}$. Außerhalb der Kugel sei Vakuum.

i. Zeigen Sie, dass es ein skalares Potential Ψ gibt, so dass $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Psi$. Zeigen Sie außerdem, dass Ψ der Laplace-Gleichung $\triangle\Psi = 0$ genügt.

ii. Sei die x_3-Achse in Richtung von $\vec{M}$, d.h. $\vec{M} = M\vec{e}_3$, so dass Ψ nicht vom Azimuthalwinkel φ abhängt. Wegen $\triangle\Psi = 0$ lässt sich Ψ wie folgt entwickeln:

$$\Psi(r,\theta) = \begin{cases} \displaystyle\sum_\ell A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta) & \text{innerhalb der Kugel} \\ \displaystyle\sum_\ell \left(B_\ell r^\ell + \frac{C_\ell}{r^{\ell+1}}\right) P_\ell(\cos\theta) & \text{außerhalb der Kugel.} \end{cases}$$

Dabei sind P_ℓ die Legendre-Polynome: $\triangle P_\ell(\cos\theta) = -\dfrac{\ell(\ell+1)}{r^2} P_\ell(\cos\theta)$ und A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ Konstanten. Begründen Sie, warum $B_\ell = 0$ für alle ℓ gelten muss.

iii. Stellen Sie die Randbedingungen für Ψ an der Kugeloberfläche auf. Zeigen Sie, dass daraus $A_\ell = C_\ell = 0$ für alle $\ell \neq 1$ folgt, sowie $A_1 = C_1/R^3 = M/3$.

iv. Berechnen Sie mithilfe des Resultats von **iii.** die Felder $\vec{B}$ und $\vec{H}$ innerhalb und außerhalb der Kugel. Zeigen Sie, dass beide in der Kugel homogen sind und außerhalb genau dem Feld eines magnetischen Dipols entsprechen.

33. Vektorpotential aus externer Stromdichte und Magnetisierung

Sei ein durch eine externe Stromdichte $\vec{J}_{\text{ext}}(\vec{r})$ durchlaufenes magnetisches Medium mit der Magnetisierung $\vec{M}(\vec{r})$. Zeigen Sie, dass das magnetische Feld $\vec{B}$, das sich aus dem Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,'\, \frac{\vec{J}_{\text{ext}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,'\, \frac{\vec{M}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

ableiten lässt, die stationäre makroskopische Maxwell–Ampère-Gleichung $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_{\text{ext}}$ löst, wobei $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$.

34. Einfache Modelle für die konstitutiven Gleichungen

In dieser Aufgabe werden *klassische* Modelle dargelegt, die korrekte funktionale Formen für die Leitfähigkeit eines elektrischen Leiters und die dielektrische Funktion eines Dielektrikums liefern. Dabei werden Ladungsträger (Ladung q, Masse m) in einem makroskopischen Körper durch ein homogenes externes elektrisches Feld $\vec{E}(t)$ beschleunigt und durch Stöße abgebremst, mit einer Kraft $-m\Gamma\vec{v}(t)$ proportional zur Geschwindigkeit ($\Gamma > 0$).

i. Elektrische Leitfähigkeit: Drude-Modell

Zunächst werden als Ladungsträger nur die *freien* Ladungen in einem Leiter betrachtet.

(a) Zeigen Sie, dass das Grundprinzip der Dynamik die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{\Gamma t}\vec{v}(t)\right] = \frac{q}{m}\,\mathrm{e}^{\Gamma t}\vec{E}(t)$$

für die Bewegung eines Ladungsträgers liefert.

Folgern Sie daraus, dass die Stromdichte im Leiter durch

$$\vec{J}(t) = \frac{n_\mathrm{f} q^2}{m} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\tau \, \mathrm{e}^{-\Gamma\tau} \, \vec{E}(t-\tau) \tag{1}$$

gegeben ist, wobei n_f die (konstante) Dichte von freien Ladungsträgern bezeichnet.

(b) Sei $\tilde{\vec{E}}(\omega)$ bzw. $\tilde{\vec{J}}(\omega)$ die Fourier-Transformierte des elektrischen Felds bzw. der Stromdichte. Wie lautet Gl. (1) im Fourier-Raum? Lesen Sie daraus die elektrische Leitfähigkeit $\sigma(\omega)$ ab.

(c) Zeigen Sie die „Summenregel" $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \, \sigma(\omega) = \frac{n_\mathrm{f} q^2}{m}\pi.$

ii. Dielektrische Funktion: Lorentz-Drude-Modell

Jetzt sind die Ladungsträger an „Gleichgewichtsstellen" *gebunden*. Der Einfachheit halber wird für die Bindungskraft das Modell eines harmonischen Oszillators $\vec{F}(t) = -m\omega_0^2 \vec{r}(t)$ angenommen, mit $\vec{r}(t)$ der Verschiebung des Ladungsträgers aus seiner Gleichgewichtsstelle und ω_0 einer Kreisfrequenz.

(a) Sei n_g die Dichte von gebundenen Ladungsträgern. Zeigen Sie mithilfe des Grundprinzips der Dynamik, dass die Polarisation $\vec{P} = n_\mathrm{g} q \vec{r}$ der Gleichung im Fourier-Raum

$$\tilde{\vec{P}}(\omega) = \frac{n_\mathrm{g} q^2}{m} \frac{\tilde{\vec{E}}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\Gamma}$$

genügt. Geben Sie die elektrische Suszeptibilität $\chi_\mathrm{e}(\omega)$ und die relative dielektrische Funktion $\epsilon_r(\omega)$ an.

(b) Zeigen Sie die Summenregel $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \, (-\mathrm{i}\omega)\chi_\mathrm{e}(\omega) = \frac{n_\mathrm{g} q^2}{m}\pi.$