Übung Nr. 9

27. Kanonische Variablen in der Präsenz eines elektromagnetischen Felds

In der Vorlesung wurde die Wirkung $S = S_{\rm M} + S_{\rm M+F}$ eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld gegeben. Zeigen Sie, dass diese in Form des Integrals

$$S_{\rm M} + S_{\rm M+F} = -\int_a^b {\rm d}x_\mu \, P^\mu$$

geschrieben werden kann. Hier ist $P^\mu = (H/c, \vec{\Pi})$, wobei H die Hamilton-Funktion und $\vec{\Pi}$ den kanonischen Impuls bezeichnen. Drücken Sie desweiteren H als Funktion von $\vec{\Pi}$ aus.

28. „Topologische“ Lagrange-Dichte

Die Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Felds sei um den zusätzlichen sog. *topologischen* Term der Form

$$\delta\mathcal{L}_{\rm t} = \frac{1}{2\mu_0} F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$$

erweitert, wobei $\tilde{F}^{\mu\nu}$ den dualen Feldstärketensor bezeichnet.

i. Prüfen Sie die Gleichheit $\delta\mathcal{L}_{\rm t} = \partial_\mu J^\mu/\mu_0$ nach, wobei

$$J^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma.$$

Folgern sie daraus, dass der zusätzliche Term die Bewegungsgleichungen unverändert lässt.

ii. Zeigen Sie die folgenden Ausdrücke in Abhängigkeit der üblichen Felder und Potentiale:

$$J^0 = \vec{A} \cdot \vec{B}$$
$$\vec{J} = \frac{1}{c}\left(\phi\vec{B} - \vec{A} \times \vec{E}\right)$$

Prüfen Sie mithilfe dieser Formen die Gleichheit $\partial_0 J^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \mu_0 \delta\mathcal{L}_{\rm t}$ nach.

29. Invarianz unter Dilatation

Sei ein reelles Feld $\varphi(x)$. Es wird angenommen, dass dessen Wirkung invariant unter den sog. Dilatationstranformationen

$$x^\mu \to x'^\mu = \lambda x^\mu$$
$$\varphi(x) \to \varphi'(x') = \varphi(x)$$

ist, mit λ einer beliebigen positiven reellen Zahl.

i. Prüfen Sie nach, dass der mit einer infinitesimalen Dilatation (mit Parameter ϵ) assoziierte Noether-Strom durch $N^\mu/\epsilon = T^\mu{}_\nu x^\nu$ gegeben ist, mit $T^{\mu\nu}$ dem kanonischen Energieimpulstensor.

ii. Es wird außerdem wie in der Vorlesung angenommen, dass die Lagrange-Dichte nicht explizit von x^μ abhängt. Folgern Sie aus der Erhaltungsgleichung für N^μ, dass $T^\mu_\mu = 0$: der Energieimpulstensor ist *spurlos*.