

Übung Nr. 8

23. Alternative Lagrange-Dichte für das elektromagnetische Feld

Es sei die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}'_{\text{F,M+F}}[A_\nu, \partial_\mu A_\nu] = -\frac{1}{2\mu_0}(\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu) - j_\nu A^\nu,$$

mit j^μ einem festen Viererstrom und A^μ einem Vierervektor, der die dynamische Variable darstellt.

Bestimmen Sie die entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichungen ($\mathcal{EL}1$). Vergleichen Sie das Resultat mit den Gleichungen ($\mathcal{EL}2$), die aus der Standard-Lagrange-Dichte für das elektromagnetische Feld folgen. Unter welcher Bedingung stimmen die Gleichungen ($\mathcal{EL}1$) und ($\mathcal{EL}2$) zusammen?

24. Massives Vektorfeld. Proca-Gleichung

Es sei ein Vektorfeld $A^\mu(x)$, beschrieben durch die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}[A_\mu, \partial_\nu A_\mu] = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2 c^2}{2\mu_0 \hbar^2}A_\mu A^\mu - j_\mu A^\mu, \quad (1)$$

mit $F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$, m einer Konstante, und $j^\mu(x)$ einem festen äußeren Strom.

i. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen („Proca-Gleichungen“) für das Feld A^μ . Wie ändern sich die Maxwell-Gleichungen? Sind die Proca-Gleichungen eichinvariant?

ii. Zeigen Sie, dass bei erhaltenem Strom die Proca-Gleichungen zu

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right)A^\mu(x) = \mu_0 j^\mu(x)$$

werden. Welcher Bedingung genügen die entsprechenden ebenen Wellen? Was ist die physikalische Bedeutung von m ?

25. Experimentelle Grenzen für die Masse des Photons

Die Lagrange-Dichte (1) beschreibt ein massives Photon (Lichtquant).¹ In dieser Aufgabe werden Grenzen für die Masse dieses Photons hergeleitet.

i. Was wird die Maxwell-Gauss-Gleichung in Anwesenheit des Massenterms (vgl. Übung 24 **i.**)?

ii. Eine perfekt leitende leere Kugel mit dem Radius a sei unter einer Spannung V gleichförmig geladen. Welche Werte nehmen das Potential A^0 und das elektrische Feld innerhalb der Kugel an, wenn $m = 0$? Wenden Sie den Gauß'schen Satz auf die in **i.** erhaltene Gleichung an, um das elektrische Feld und danach das skalare Potential innerhalb der Kugel zur führenden Ordnung in m für $m \neq 0$ zu berechnen.

iii. Eine nicht-geladene leitende Kugel mit dem Radius b wird innerhalb der obigen Kugel eingesetzt, und die relative Potentialspannung $\Delta V/V$ zwischen den zwei Kugeln wird mithilfe eines Galvanometers gemessen. Der neueste Experimentalversuch² liefert $\Delta V/V < 4 \cdot 10^{-16}$ für $a = 1,5$ m und $b = 1$ m. Bestimmen Sie die obere Grenze für die Masse des Photons, die aus diesem Experiment folgt.

¹Genauer: die elementaren Anregungen des quantisierten Vektorfelds A^μ beschrieben durch Gl. (1) sind massive Photonen.

²Williams, Faller & Hill, Phys. Rev. Lett. **26** (1971) 721.

26. Eichinvarianz und Noether-Theorem

Die Standard-Lagrange-Dichte für das freie elektromagnetische Feld ist invariant unter der Transformation $A^\mu \rightarrow A^\mu + \epsilon^\mu$, wobei ϵ^μ ein beliebiger konstanter Vierervektor ist. Berechnen Sie den entsprechenden Noether-Strom und schreiben Sie die zugehörige Erhaltungsgleichung. Was erkennen Sie?