Übung Nr. 7

21. Strahlungsverlust in senkrechtem Magnetfeld

Ein Teilchen der Masse m und Ladung q bewege sich in einer Ebene senkrecht zu einem homogenen konstanten Magnetfeld, der Betrag der Feldstärke sei B.

i. Berechnen Sie die gesamte pro Zeiteinheit abgestrahlte Energie und drücken Sie diese durch die Größen m, q, c, B sowie $\gamma = E/(mc^2)$, wobei E die Energie des Teilchens ist, aus.

ii. Zur Zeit $t = 0$ habe das Teilchen die Gesamtenergie $E_0 = \gamma_0 mc^2$. Zeigen Sie, dass es zu einem Zeitpunkt t mit

$$t \approx \frac{6\pi\epsilon_0 m^3 c^3}{q^4 B^2}\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_0}\right)$$

die Energie $E = \gamma mc^2$ hat, sofern $\gamma \gg 1$.

22. Drude- und Lorentz–Drude-Modelle

In dieser Aufgabe werden *klassische* Modelle dargelegt, die korrekte funktionale Formen für die Leitfähigkeit eines elektrischen Leiters und die dielektrische Funktion eines Dielektrikums liefern. Dabei werden Ladungsträger (Ladung q, Masse m) in einem makroskopischen Körper durch ein homogenes externes elektrisches Feld $\vec{E}(t)$ beschleunigt und durch Stöße abgebremst, mit einer Kraft $-m\Gamma\vec{v}(t)$ proportional zur Geschwindigkeit ($\Gamma > 0$).

i. Elektrische Leitfähigkeit: Drude-Modell

Zunächst werden als Ladungsträger nur die *freien* Ladungen in einem Leiter betrachtet.

(a) Zeigen Sie, dass das Grundprinzip der Dynamik die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{\Gamma t}\vec{v}(t)\right] = \frac{q}{m}\,\mathrm{e}^{\Gamma t}\vec{E}(t)$$

für die Bewegung eines Ladungsträgers (Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$) liefert.

Folgern Sie daraus, dass die Stromdichte im Leiter durch

$$\vec{J}(t) = \frac{n_\mathrm{f} q^2}{m}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}\tau\, \mathrm{e}^{-\Gamma\tau}\,\vec{E}(t-\tau) \tag{1}$$

gegeben ist, wobei n_f die konstante Dichte von freien Ladungsträgern bezeichnet.

(b) Sei $\tilde{\vec{E}}(\omega)$ bzw. $\tilde{\vec{J}}(\omega)$ die Fourier-Transformierte des elektrischen Felds bzw. der Stromdichte. Wie lautet Gl. (1) im Fourier-Raum? Lesen Sie daraus die elektrische Leitfähigkeit $\sigma(\omega)$ ab (Ohm'sches Gesetz!).

(c) Zeigen Sie die „Summenregel“ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\,\sigma(\omega) = \frac{n_\mathrm{f} q^2}{m}\pi.$

ii. Dielektrische Funktion: Lorentz–Drude-Modell

Jetzt sind die Ladungsträger an „Gleichgewichtsstellen“ *gebunden*. Der Einfachheit halber wird für die Bindungskraft das Modell eines harmonischen Oszillators $\vec{F}(t) = -m\omega_0^2\vec{r}(t)$ angenommen, mit $\vec{r}(t)$ der Verschiebung des Ladungsträgers aus seiner Gleichgewichtsstelle und ω_0 einer Kreisfrequenz.

(a) Sei n_g die Dichte von gebundenen Ladungsträgern. Zeigen Sie mithilfe des Grundprinzips der Dynamik, dass die Polarisation $\vec{P} = n_\mathrm{g} q\vec{r}$ der Gleichung im Fourier-Raum

$$\tilde{\vec{P}}(\omega) = \frac{n_{\mathrm{g}} q^2}{m} \frac{\tilde{\vec{E}}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\Gamma}$$

genügt.

Die dielektrische Funktion $\chi_{\mathrm{e}}(\omega)$ sei durch

$$\tilde{\vec{P}}(\omega) = \chi_{\mathrm{e}}(\omega)\, \epsilon_0 \tilde{\vec{E}}(\omega)$$

definiert. Lesen Sie $\chi_{\mathrm{e}}(\omega)$ und geben Sie die dielektrische Funktion $\epsilon(\omega) \equiv [1 + \chi_{\mathrm{e}}(\omega)]\epsilon_0$ an.

(b) Zeigen Sie die Summenregel $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, (-\mathrm{i}\omega)\chi_{\mathrm{e}}(\omega) = \frac{n_{\mathrm{g}} q^2}{m\epsilon_0}\pi$.