

Übung Nr. 6

18. Ladung als Lorentz-Skalar

Für den Viererstrom $j^\mu(x)$ gilt die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$. Zeigen Sie, dass dann die Größe $q = \int d^3\vec{r} j^0(x)/c$ ein Lorentz-Skalar ist. Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass q in der Form

$$q = \frac{1}{c} \int_{x^0=\text{const.}} d\sigma_\mu j^\mu$$

umschrieben werden kann, wobei

$$d\sigma_\mu = \frac{1}{6} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} d\tau^{\nu\rho\sigma}$$

ein Vierervektor ist und $d\tau^{\nu\rho\sigma}$ ein antisymmetrischer Tensor, der durch die Zuweisungen

$$d\tau^{012} = dx^0 dx^1 dx^2, \quad d\tau^{021} = -dx^0 dx^2 dx^1, \quad \text{usw.}$$

mit $x^0 = ct$ festgelegt ist. Damit stellen die $d\tau^{\nu\rho\sigma}$ dreidimensionale Hyperflächenelemente des Minkowski-Raums dar.

19. Über die Zeit gemittelte Strahlungsleistung

Ein Teilchen der Ladung q bewege sich längs der z -Achse gemäß $z(t) = L \cos(\omega t)$.

i. Zeigen Sie, dass die in das Raumwinkelement $d\Omega$ abgestrahlte Leistung durch

$$\frac{dP_0}{d\Omega} = \frac{c q^2 \hat{\beta}^4}{16\pi^2 \epsilon_0 L^2} \frac{\sin^2 \theta \cos^2(\omega t)}{[1 + \hat{\beta} \cos \theta \sin(\omega t)]^5}$$

gegeben ist, wobei $\hat{\beta} = L\omega/c$.

ii. Zeigen Sie, dass für das zeitliche Mittel von Ihrem Resultat aus i.

$$\frac{dP_0}{d\Omega} = \frac{c q^2 \hat{\beta}^4}{128\pi^2 \epsilon_0 L^2} \frac{4 + \hat{\beta}^2 \cos^2 \theta}{(1 - \hat{\beta}^2 \cos^2 \theta)^{7/2}} \sin^2 \theta$$

gilt, wobei $|\hat{\beta}| < 1$ angenommen wird.

20. Strahlungsverlust in Kreisbeschleunigern

Der Teilchenbeschleuniger mit der größten Teilchenenergie (7 TeV = $7 \cdot 10^{12}$ eV), das Large Hadron Collider (LHC), ist ein Protonenbeschleuniger. Aus teilchenphysikalischen Gründen hätte man aber viel lieber einen Elektronenbeschleuniger gleicher Energie.

i. Um wieviel höher als im LHC ist die Energie, die in einem 7 TeV Elektronenbeschleuniger der gleichen Größe durch Strahlung verloren ginge?

ii. Der LHC hat einen Umfang von 27 km. Wie groß müsste man einen 7 TeV Elektronenbeschleuniger bauen, der den gleichen Energieverlust durch Strahlung hat wie der LHC?

Hinweis: Nehmen Sie der Einfachheit halber an, die Teilchen bewegten sich mit konstanter Energie auf Kreisbahnen.