Übung Nr. 5

14. Ähnlichkeitsbetrachtungen bei der Strömung in Röhren

Der Zusammenhang zwischen dem Druckgefälle pro Längeneinheit $\Delta p/L$ und der mittleren Strömungsgeschwindigkeit $\langle v \rangle$ werde für ein gegebenes Rohr und ein bestimmtes Fluid gegeben durch

$$\frac{\Delta p}{L} = C\langle v \rangle^n,$$

wobei C eine Größe ist, die von der Massendichte ρ, der kinematischen Scherviskosität ν und dem Rohrradius a abhängen kann. n ist eine Zahl, die vom Strömungszustand abhängt: $n = 1$ für den laminaren Strömungszustand (Hagen–Poiseuille-Gesetz, vgl. Vorlesung), $n = 1,75$ bzw. $n = 1,722$ für den turbulenten Strömungszustand nach Hagen (1854) bzw. Reynolds (1883).

Unter der Annahme, dass C ein Produkt von Potenzen von ρ, ν und a ist, bestimmen Sie die Exponenten dieser Potenzen aus einer Dimensionsbetrachtung.

15. Drehimpuls

Betrachten Sie den 4-Tensor 3. Stufe

$$M^{\mu\nu\rho}(x) = T^{\mu\nu}(x)\, x^\rho - T^{\mu\rho}(x)\, x^\nu,$$

wobei $T^{\mu\nu}$ ein divergenzfreier symmetrischer Energieimpulstensor ist.

i. Zeigen Sie, dass $M^{\mu\nu\rho}$ der Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu M^{\mu\nu\rho} = 0$ genügt.

ii. Die Größen

$$J^{kl} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\, M^{0kl} \quad k, l = 1, 2, 3$$

bilden einen antisymmetrischen 3-Tensor, aus dem man bekanntlich einen Axialvektor mit den Komponenten $A_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J^{kl}$ bilden kann. Welche Bedeutung hat dieser Axialvektor?

iii. Drücken Sie die Komponenten des Axialvektors aus **ii.** für den Fall des elektromagnetischen Felds durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus.

16. Ebene elektromagnetische Welle

Eine linear polarisierte ebene Welle ist definitionsgemäß eine Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum der Form

$$A^\mu(x) = \epsilon^\mu f(n_\mu x^\mu),$$

wobei ϵ^μ, n^μ x-unabhängige Vierervektoren sind und f eine skalare Funktion ist. Dieser Ausdruck von $A^\mu(x)$ ist kovariant, d.h. ändert sich unter einer Lorentz-Transformation nicht.

i. Wie lautet der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}(x)$?

ii. Überprüfen Sie, dass die Transformation $\epsilon^\mu \to \epsilon^\mu + \lambda n^\mu$ mit beliebigem $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Eichtransformation ist.

iii. Geben Sie den Ausdruck der Maxwell-Gleichungen im Vakuum an. Prüfen Sie, dass die Lösungen für $n_\mu n^\mu \neq 0$ sogenannte „reine Eichungen" sind, d.h. durch eine Eichtransformation können sie in $A^\mu(x) = 0$ wegtransformiert werden.

iv. Sei nunmehr $n_\mu n^\mu = 0$. Zeigen Sie, dass das Feld der Lorenz-Eichbedingung automatisch genügt, obwohl die Eichung noch nicht fixiert wurde.

v. Berechnen Sie die Invarianten des elektromagnetischen Felds. Welche bekannte Ergebnisse finden Sie?

vi. Zeigen Sie, dass $\epsilon_\mu \epsilon^\mu < 0$ für ein Feld gilt, das keine reine Eichung ist.
Folglich kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\epsilon_\mu \epsilon^\mu = -1$ ansetzen.

vii. Zeigen Sie, dass es möglich ist, durch eine Eichtransformation $\epsilon^0 = 0$ anzusetzen. Welcher Eichung entspricht diese (nicht-kovariante) Bedingung? Zeigen Sie, dass n^0 zu 1 normiert werden kann und überprüfen Sie, dass man die bekannte Form von $\phi(t, \vec{x})$ und $\vec{A}(t, \vec{x})$ für eine ebene Welle erhält.

17. Levi-Civita-Tensor

Beweisen die folgenden Gleichungen, indem Sie die Konstanten N_1, N_2, N_3 berechnen

$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = N_1$

$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} = N_2 \delta^\alpha_\mu$

$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} = N_3(\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \delta^\beta_\mu \delta^\alpha_\nu)$.