Übung Nr. 4

11. Wärmediffusion und Dämpfung

In der Vorlesung wurde für ein statisches dissipatives Fluid die Gleichung

$$\frac{\partial e(t,\vec{x})}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot [\kappa \vec{\nabla} T(t,\vec{x})]$$

hergeleitet, wobei κ die Wärmeleitfähigkeit bezeichnet. Seien $C \equiv \partial e/\partial T$ und κ Konstanten und $\chi \equiv \kappa/C$. Lösen Sie $T(t,\vec{x})$ für $z < 0$ mit der Randbedingung, dass auf der Ebene $z = 0$ die Temperatur räumlich konstant ist und die Zeitabhängigkeit $T = T_0 \cos(\omega t)$ aufzeigt. In welcher Tiefe sind die Wärmeschwankungen 10 % derjenigen auf der Ebene $z = 0$?

12. Taylor–Couette-Strömung. Messung der Scherviskosität

In einem Couette-Viskosimeter befindet sich eine zu messende viskose Flüssigkeit in einem Ringspalt zwischen zwei konzentrischen Zylindern mit der Höhe L: der äußere Zylinder (Radius R_2) rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_2, während der Innenzylinder (Radius R_1) still bleibt. Die Strömung der Flüssigkeit wird zweidimensional, inkompressibel und stationär angenommen.

i. Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung zu $v_r = 0$ führt, wobei v_r die Radialkomponente (in einem Zylinderkoordinatensystem) der Strömungsgeschwindigkeit bezeichnet.

ii. Zeigen Sie, dass die Navier–Stokes-Gleichung die Gleichungen

$$\frac{v_\varphi(r)^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p(r)}{\partial r} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 v_\varphi(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi(r)}{\partial r} - \frac{v_\varphi(r)}{r^2} = 0 \tag{2}$$

liefert. Was ist die Bedeutung der Gl. (1)? Lösen Sie die Gl. (2) mit dem Ansatz $v_\varphi(r) = ar + \dfrac{b}{r}$.

iii. Man kann zeigen, dass die $r\varphi$-Komponente des Spannungstensors durch

$$\sigma_{r\varphi} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right)$$

gegeben wird. Zeigen Sie, dass $\sigma_{r\varphi} = -\dfrac{2b\eta}{r^2}$, wobei b derselbe Koeffizient wie oben ist.

iv. An der Wand des Innenzylinders wird ein Drehmoment $\mathcal{M}_z$ gemessen. Wie ergibt sich die Scherviskosität η aus dieser Messung?
Numerisches Beispiel: es seien $R_1 = 10$ cm, $R_2 = 11$ cm, $L = 10$ cm, $\Omega_2 = 10$ rad·s^{-1} und $\mathcal{M}_z = 7{,}246 \cdot 10^{-3}$ N·m.

13. Strömung an einer oszillierenden Wand (Zweites Stokes'sches Problem)

Es sei eine unendlich ausgedehnte ebene Wand ($y = 0$), die einer Schwingungsbewegung mit der Geschwindigkeit $U\cos(\omega t)\,\vec{e}_x$ unterliegt. Im Bereich $y > 0$ befindet sich ein inkompressibles Newtonsches Fluid mit der kinematischen Scherviskosität ν. Wir nehmen an, dass Volumenkräfte vernachlässigbar sind, dass der Druck gleichförmig und stationär bleibt, und dass die durch die Schwingungen induzierte Strömung des Fluids von der x-Koordinate nicht abhängt.

i. Bestimmen Sie die Strömungsgeschwindigkeit $v(t,x)$ und plotten Sie das Resultat.

ii. Was ist die charakteristische Dicke der mitschwingenden Fluidschicht in der Nähe der Wand? Kommentieren Sie das Ergebnis.