Übung Nr. 3

8. Differentielle Form des Thomsonschen Satzes

i. Zeigen Sie, dass in einem idealen Fluid der Wirbelvektor $\vec{\Omega}(t,\vec{r})$ der Gleichung

$$\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{\Omega})$$

genügt.

ii. Ein stationärer „Wirbel" sei eine Strömung der Form $\vec{\Omega} = A\,\delta(x)\,\delta(y)\,\vec{e}_z$ mit A einer Konstante. Bestimmen Sie die entsprechende Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}$.

Hinweis: Benutzen Sie Symmetrieargumente und den Stokes'schen Satz.

9. Zweidimensionale Potentialströmung. Teekanneneffekt

Betrachten Sie eine inkompressible zweidimensionale Potentialströmung mit der Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}(t,\vec{r}) = \vec{v}(t,x,y)$. Es seien $\phi(t,x,y)$ das Geschwindigkeitspotential ($\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi$) und $\psi(t,x,y)$ die sogenannte „Strömungsfunktion" ($v_x = -\partial_y\psi$, $v_y = \partial_x\psi$). Eine komplexe Variable z sei definiert durch $z = x + \mathrm{i}y$.

i. Zeigen Sie, dass die Strömungsfunktion der Laplace-Gleichung genügt, und dass die Kurven $\psi(t,x,y) =$ Konstante die Stromlinien der Strömung sind.

ii. Sei $w(t,z) = \phi(t,x,y) + \mathrm{i}\psi(t,x,y)$ das komplexe Potential für die Strömung. Zeigen Sie, dass w eine analytische Funktion von z ist, indem Sie die Gültigkeit der Cauchy–Riemannschen partiellen Differentialgleichungen nachprüfen.

iii. Zeigen Sie, dass $\dfrac{\partial w}{\partial z} = -v_x + \mathrm{i}v_y$.

iv. Betrachten Sie das komplexe Potential $w(z) = Az^n$ mit reellem A und $n \geq 1/2$. Zeigen Sie, dass Sie mit diesem Potential die Strömung an der Ecke $\widehat{\mathcal{E}}$ zwischen zwei Wänden, die den Winkel $\alpha = \pi/n$ einschließen, beschreiben können.

Hinweis: Landau–Lifschitz, Hydrodynamik, § 10.

v. Was können Sie über die Geschwindigkeit in der Näherung der Ecke $\widehat{\mathcal{E}}$ sagen?

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $\alpha < \pi$ und $\alpha > \pi$.

vi. Teekanneneffekt Wenn man eine Flüssigkeit aus einer Kanne „vorsichtig" ausgießen will, beobachtet man, dass die Flüssigkeit an der Unterseite der Tülle fließt, statt nach unten zu fallen. Erklären Sie dieses Phänomen mithilfe des oben dargestellten Modells einer Strömung (im Fall $\alpha > \pi$) und der Bernoulli-Gleichung.

Literatur: Jearl Walker, Scientific American, Okt. 1984 oder Spektrum der Wissenschaft, Feb. 1985.

vii. Falls die Strömung eines Flusses mit dem oben eingeführten Potential modelliert wird, welche qualitative Entwicklung kann für das Ufer vorgesehen werden?

10. Schallgeschwindigkeit in ultrarelativistischer Materie

Wir betrachten ein ideales Fluid mit dem Energieimpulstensor $T^{\mu\nu} = -p\eta^{\mu\nu} + (\epsilon + p)u^\mu u^\nu/c^2$. Es sei angenommen, dass es keine thermodynamisch relevante erhaltene Teilchenzahl gibt, so dass die Energiedichte ϵ als Funktion von nur einer thermodynamischen Größe ausgedrückt werden kann, z.B. $\epsilon = \epsilon(p)$.

i. Leiten Sie, ausgehend von der Energieimpulserhaltung $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, den Ausdruck

$$c_s^2 = \frac{c^2}{\mathrm{d}\epsilon/\mathrm{d}p}$$

für die Schallgeschwindigkeit her.

Hinweis: Linearisierung für kleine Auslenkungen von p, ϵ und v um einen ruhenden Hintergrund.

ii. Betrachten wir eine Materie dessen Zustandsgleichung durch das Stefan–Boltzmann-Gesetz

$$p = \frac{g\pi^2}{90} \frac{(k_\mathrm{B}T)^4}{(\hbar c)^3}$$

gegeben wird, wobei g die Zahl der Freiheitsgrade bezeichnet (z.B. ist $g = 2$ für die Schwarzkörperstrahlung). Bestimmen Sie c_s in diesem Fall.

Hinweis: Die Gibbs–Duhem Relation kann nützlich sein...