Übung Nr. 2

4. Isotropie des Drucks

Sei ein Punkt $\vec{r}$ in einem ruhenden Fluid. Die mechanische Spannung auf jedes Oberflächenelement durch diesen Punkt ist normal: $\tau_s(\vec{r}) = -p(\vec{r})\,\vec{n}$. Zeigen Sie, dass der (hydrostatische) Druck p unabhängig von der Richtung $\vec{n}$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Kräfte auf ein Elementartetraeder, von dem drei Seiten orthogonal zueinander sind.

5. Rotierende Flüssigkeit im Schwerefeld

Berechnen Sie die Form der freien Oberfläche einer inkompressiblen idealen Flüssigkeit in einem zylindrischen senkrechten Gefäß im Schwerefeld, der sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{e}_3$ um die eigene Achse dreht. Es wird angenommen, dass die Flüssigkeit mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit mitrotiert.

Hinweis: Landau–Lifschitz, Hydrodynamik §10.

6. Energieimpulstensor

Zeigen Sie mithilfe einer Lorentz-Transformation, dass der Energieimpulstensor eines idealen Fluids in einem Bezugssystem, das sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bezüglich des lokalen Ruhesystems des Fluids bewegt, zur Ordnung $\mathcal{O}(|\vec{v}|/c)$ gegeben ist durch

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \epsilon & (\epsilon+p)\frac{v_x}{c} & (\epsilon+p)\frac{v_y}{c} & (\epsilon+p)\frac{v_z}{c} \\ (\epsilon+p)\frac{v_x}{c} & p & 0 & 0 \\ (\epsilon+p)\frac{v_y}{c} & 0 & p & 0 \\ (\epsilon+p)\frac{v_z}{c} & 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie dieses Resultat mit der in der Vorlesung gegebenen allgemeinen Formel für $T^{\mu\nu}$ nach.

7. Isentropische Strömung

Sei s bzw. n die Entropie- bzw. Teilchendichte, und u^μ die Strömungsgeschwindigkeit. Wir definieren die Entropie pro Teilchen durch $s/n = S/N$. Zeigen Sie, dass in einer isentropischen Strömung $[\partial_\mu(su^\mu) = 0]$ die Entropie pro Teilchen erhalten bleibt, d.h. $\mathrm{d}(s/n)/\mathrm{d}t = 0$.