Übung Nr. 12

36. Elektromagnetische Wellen in einem Metall

Betrachtet wird ein Metall mit der relativen dielektrischen Funktion

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega(\omega + \mathrm{i}\Gamma)}$$

und der konstanten Permeabilität $\mu(\omega) = \mu_0$. Keine externen Ladungen sind vorhanden: $\varrho_{\mathrm{ext}} = 0$, $\vec{J}_{\mathrm{ext}} = \vec{0}$.

i. Sei zuerst $\Gamma \ll \Omega \ll \omega$. Zeigen Sie, dass der Brechungsindex $n = n' + \mathrm{i}n''$ in diesem Bereich reell ist, mit $n' \approx 1$. (Physikalisch bedeutet dies, dass das Metall im ultravioletten Bereich *transparent* ist.)

ii. Sei jetzt $\Gamma \ll \omega \ll \Omega$. Zeigen Sie, dass der Brechungsindex $n = n' + \mathrm{i}n''$ in diesem Bereich rein imaginär ist. (Physikalisch bedeutet dies, dass keine Wellenbewegung stattfinden kann und dass das Metall das Licht vollständig *reflektiert*, d.h. als Spiegel funktioniert.)

iii. Letztendlich wird der Fall $\omega \ll \Gamma \ll \Omega$ betrachtet. Eine elektromagnetische Welle bewege sich in die positive z-Richtung. Zeigen Sie, dass ihr Betrag als $|\vec{E}| \sim \exp(-z/d_{\mathrm{skin}})$ gedämpft wird, mit $d_{\mathrm{skin}} = c/\sqrt{\sigma\omega/2\epsilon_0}$, wobei $\sigma = \epsilon_0\Omega^2/\Gamma$ die Leitfähigkeit ist. Dieser Effekt heißt *Skineffekt*.

37. Felder an Grenzflächen zwischen Materialien

Wir wollen das Verhalten von elektrischen und magnetischen Feldern an Grenzflächen zwischen Materialien mit verschiedenen Permittivitäten und Permeabilitäten untersuchen. Dabei nehmen wir an, daß die frei beweglichen Ladungs- und Stromdichten an den Grenzflächen verschwinden.

i. Geben Sie die Stetigkeitsbedingungen für die Tangential- bzw. Normalkomponenten der Felder $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$ und $\vec{H}$ an einer Grenzfläche zwischen verschiedenen Materialen an.

ii. Leiten Sie aus den Stetigkeitsbedingungen die „Brechungsgesetze“ für die elektrischen bzw. magnetischen Feldlinien an Grenzflächen her.

38. Langsames Licht

Sei ein Material, dessen dielektrische Funktion durch das Lorentz–Drude-Modell beschrieben wird, mit zwei eng benachbarten Resonanzen $\omega_1 = \omega_0 - \Delta$ und $\omega_2 = \omega_0 + \Delta$, wobei $\Delta \ll \omega_0$, mit jeweiligen Breiten Γ_1 und Γ_2 und gleich großen Amplituden $\Omega_1^2 = \Omega_2^2 = \Omega^2$. Die relative Permeabilität wird als konstant im Bereich dieser Resonanzen angenommen: $\mu_r(\omega) = \mu_r \simeq 1$.

In einem „normalen“ Material entspricht Γ_a der Dämpfung der Schwingungen der Elektronen und führt (mit positivem Wert) zur Absorption einfallender elektromagnetischer Wellen mit Frequenzen in der Nachbarschaft der Resonanzfrequenz ω_a. Hier wird angenommen, dass dieses Verhalten für die niedrigere Resonanz bei ω_1 gilt, aber dass bei der höheren Kreisfrequenz ω_2 einfallende Wellen verstärkt werden, was durch eine negative Dämpfungskonstante Γ_2 modelliert wird.[1] Der Einfachheit halber wird $\Gamma_2 = -\Gamma_1 \equiv -\Gamma$ mit $\Gamma \ll \omega_0$ angenommen. Außerdem wird der Einfluss der anderen Resonanzen vernachlässigt.

[1] Die Schwächung im Medium einer Welle mit der Kreisfrequenz ω_a entspricht quantenmechanisch der Absorption von Photonen der Energie $\hbar\omega_a$, die gleich der Energiedifferenz zwischen zwei Energieniveaus des Mediums ist. Im Fall einer *Besetzungsinversion* zwischen zwei Niveaus kann die Intensität einer Welle mit der geeigneten Frequenz durch den Zerfall des angeregten Niveaus verstärkt werden: dabei handelt es sich um das Laser-Effekt.

i. Wie lautet die relative dielektrische Funktion $\epsilon_r(\omega)$? Schreiben Sie diese um, indem Sie Δ^2 gegen $\Delta\omega_0$ vernachlässigen.

ii. Berechnen Sie $\epsilon_r(\omega_0)$, sowie den Brechungsindex $n(\omega_0)$ und die Phasengeschwindigkeit $c_{\text{eff}}(\omega_0)$. Wie verhält sich das Medium für eine elektromagnetische Welle („Licht") dieser Frequenz?
Hinweis: Was ist $\operatorname{Im}\epsilon_r(\omega_0)$?

iii. Skizzieren Sie den Real- und den Imaginärteil vom Brechungsindex $n(\omega)$ im Bereich der Resonanzen ω_1 und ω_2. Zeigen Sie, dass Licht mit einer Kreisfrequenz etwas kleiner bzw. größer als ω_0 abgeschwächt bzw. verstärkt wird.
Hinweis: Sie können die Näherung $n(\omega) \simeq 1 + \frac{1}{2}[\epsilon_r(\omega) - 1]$ benutzen.

iv. Zeigen Sie, dass die Gruppengeschwindigkeit bei ω_0 annähernd durch

$$v_g(\omega_0) \simeq \frac{c}{2\Omega^2} \frac{(4\Delta^2 + \Gamma^2)^2}{4\Delta^2 - \Gamma^2}$$

gegeben wird.

v. Im Dampf eines Metalls mit der Ladungszahl Z ist $\Omega^2 \simeq n_\mathrm{e} e^2/(\epsilon_0 m_\mathrm{e} Z)$, mit n_e der Elektronendichte.
Berechnen Sie $v_g(\omega_0)$ für den Fall von Natrium ($Z = 11$) mit $n_\mathrm{e} = 5 \cdot 10^{18}\,\mathrm{m}^{-3}$ und $\Gamma = \Delta = 5 \cdot 10^6\,\mathrm{s}^{-1}$.

In einem Experiment [L. V. Hau *et al.*, Nature **397** (1999) 594] mit den obigen Werten von n_e und Γ wurde eine Gruppengeschwindigkeit des Lichts von $17\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ gemessen.