Übung Nr. 11

33. Vektorpotential aus externer Stromdichte und Magnetisierung

Sei ein durch eine externe Stromdichte $\vec{J}(\vec{r})$ durchlaufenes magnetisches Medium mit der Magnetisierung $\vec{M}(\vec{r})$. Zeigen Sie, dass das magnetische Feld $\vec{B}$, das sich aus dem Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,'\, \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,'\, \frac{\vec{M}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

ableiten läßt, die statische makroskopische Maxwell–Ampère-Gleichung $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$ löst, wobei $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$.

34. Homogen magnetisierte Kugel

Betrachten Sie eine Kugel mit Radius R und homogener Magnetisierung $\vec{M}$. Außerhalb der Kugel sei Vakuum.

i. Zeigen Sie, dass es ein skalares Potential Ψ gibt, so dass $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Psi$. Zeigen Sie außerdem, dass Ψ der Laplace-Gleichung $\triangle\Psi = 0$ genügt.

ii. Sei die x_3-Achse in Richtung von $\vec{M}$, d.h. $\vec{M} = M\vec{e}_3$, so dass Ψ nicht vom Azimuthalwinkel φ abhängt. Wegen $\triangle\Psi = 0$ läßt sich Ψ wie folgt entwickeln:

$$\Psi(r,\theta) = \begin{cases} \displaystyle\sum_\ell A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta) & \text{innerhalb der Kugel} \\ \displaystyle\sum_\ell \left(B_\ell r^\ell + \frac{C_\ell}{r^{\ell+1}}\right) P_\ell(\cos\theta) & \text{außerhalb der Kugel.} \end{cases}$$

Dabei sind P_ℓ die Legendre-Polynome: $\triangle P_\ell(\cos\theta) = -\dfrac{\ell(\ell+1)}{r^2}P_\ell(\cos\theta)$ und A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ Konstanten. Begründen Sie, warum $B_\ell = 0$ für alle ℓ gelten muss.

iii. Stellen Sie die Randbedingungen für Ψ an der Kugeloberfläche auf. Zeigen Sie, dass daraus $A_\ell = C_\ell = 0$ für alle $\ell \neq 1$ folgt, sowie $A_1 = C_1/R^3 = M/3$.

iv. Berechnen Sie mithilfe des Resultats von **iii.** die Felder $\vec{B}$ und $\vec{H}$ innerhalb und außerhalb der Kugel. Zeigen Sie, dass beide in der Kugel homogen sind und außerhalb genau dem Feld eines magnetischen Dipols entsprechen.

35. Magnetische Suszeptibilität

Die historisch bedingte Definition der magnetischen Suszeptibilität χ_m eines linearen magnetischen Mediums lautet $\vec{M} = \chi_\mathrm{m}\vec{H}$, mit $\vec{M}$ der Magnetisierung und $\vec{H}$ der magnetischen Feldstärke. Eine alternative Definition, die in engerer Analogie zur definierenden Relation $\vec{P} = \chi_\mathrm{e}\epsilon_0\vec{E}$ der elektrischen Suszeptibilität steht, ist

$$\vec{M} = \chi_\mathrm{m}^*\frac{\vec{B}}{\mu_0},$$

mit $\vec{B}$ dem magnetischem Feld.

i. Drücken Sie χ_m^* durch χ_m aus. Schätzen Sie die Größe des Unterschieds zwischen χ_m^* und χ_m bei kleiner Suszeptibilität $\chi_\mathrm{m} \ll 1$ ab.

ii. Für Wasser bzw. Luft gelten $\chi_\mathrm{m}(\mathrm{H_2O}) = 3,70\cdot 10^{-7}$ bzw. $\chi_\mathrm{m}(\mathrm{Luft}) = -9,04\cdot 10^{-6}$ bei Raumtemperatur. Berechnen Sie die entsprechenden Werte von χ_m^*.