

Übung Nr. 1

1. Wiederholung zur Speziellen Relativitätstheorie

i. Die 4-Beschleunigung eines Punktteilchens mit 4-Geschwindigkeit u sei definiert durch

$$a^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau},$$

wobei τ die Eigenzeit bezeichnet. Zeigen Sie, dass das 4-Skalarprodukt $a \cdot u$ verschwindet.

ii. Das Teilchen bewege sich in x^3 -Richtung. Drücken Sie die Komponenten a^μ der 4-Beschleunigung im Bezugssystem, in dem das Teilchen ruht, durch die gewöhnliche 3-Beschleunigung \vec{w} aus. Zeigen Sie, dass $a_\mu a^\mu = -\vec{w}^2$ gilt.

iii. Bestimmen Sie jetzt die Bahnkurve $x^3(t)$ (bzgl. eines festen Bezugssystems) eines Punktteilchens, das sich mit einer konstanten Beschleunigung \vec{w} (bzgl. des momentanen Ruhesystems) in x^3 -Richtung bewegt. Es sei $x^3 = dx^3/dt = 0$ zur Zeit $t = 0$.

iv. Um einen längeren Raumflug zu einem angenehmen Erlebnis zu machen, sollte man nicht auf die gewöhnliche Schwerkraft verzichten und in einem Raumschiff mit der konstanten Beschleunigung $w = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ reisen. Wie lange dauert eine Reise zur Andromedagalaxie (Entfernung $2,5 \cdot 10^6$ Lichtjahre) für die Reisenden?

2. Wiederholung zur Wellengleichung

Ein reelles Skalarfeld $\phi(t, x)$ erfülle die Gleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(t, x) = 0,$$

mit den Anfangsbedingungen $\phi(0, x) = e^{-x^2}$, $\partial_t \phi(0, x) = 0$. Bestimmen Sie die Lösung $\phi(t, x)$ für $t > 0$.

3. Beispiel einer stationären Strömung

Es sei eine im Bereich $x > 0, y > 0$ definierte stationäre Strömung, gegeben durch

$$\vec{v}(t, \vec{r}) = k(-x \vec{e}_x + y \vec{e}_y),$$

mit k einer positiven Konstante und \vec{e}_x bzw. \vec{e}_y dem Einheitsvektor in die x bzw. y -Richtung.

i. Bestimmen Sie die Stromlinien.

ii. Berechnen Sie die Beschleunigung \vec{a} in jedem Punkt der Strömung mithilfe der in der Vorlesung gegebenen Formel und der Eulerschen Betrachtungsweise.

iii. Berechnen Sie die Beschleunigung in der Lagrangeschen Betrachtungsweise.