Übung Nr. 8

23. Ebene elektromagnetische Welle

Eine linear polarisierte ebene Welle ist definitionsgemäß eine Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum der Form

$$A^\mu(x) = \epsilon^\mu f(n_\mu x^\mu),$$

wobei ϵ^μ, n^μ x-unabhängige Vierervektoren sind und f eine skalare Funktion ist. Dieser Ausdruck von $A^\mu(x)$ ist kovariant, d.h. ändert sich unter einer Lorentz-Transformation nicht.

i. Wie lautet der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}(x)$?

ii. Überprüfen Sie, dass die Transformation $\epsilon^\mu \to \epsilon^\mu + \lambda n^\mu$ mit beliebigem $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Eichtransformation ist.

iii. Geben Sie den Ausdruck der Maxwell-Gleichungen im Vakuum an. Prüfen Sie, dass die Lösungen für $n_\mu n^\mu \neq 0$ sogenannte „reine Eichungen" sind, d.h. durch eine Eichtransformation können sie in $A^\mu(x) = 0$ wegtransformiert werden.

iv. Sei nunmehr $n_\mu n^\mu = 0$. Zeigen Sie, dass das Feld der Lorenz-Eichbedingung automatisch genügt, obwohl die Eichung noch nicht fixiert wurde.

v. Berechnen Sie die Invarianten des elektromagnetischen Felds. Welche bekannte Ergebnisse finden Sie?

vi. Zeigen Sie, dass $\epsilon_\mu \epsilon^\mu < 0$ für ein Feld gilt, das keine reine Eichung ist.
Folglich kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\epsilon_\mu \epsilon^\mu = -1$ ansetzen.

vii. Zeigen Sie, dass es möglich ist, durch eine Eichtransformation $\epsilon^0 = 0$ anzusetzen. Welcher Eichung entspricht diese (nicht-kovariante) Bedingung? Zeigen Sie, dass n^0 zu 1 normiert werden kann und überprüfen Sie, dass man die bekannte Form von $\phi(t, \vec{x})$ und $\vec{A}(t, \vec{x})$ für eine ebene Welle erhält.

24. Alternative Lagrange-Dichte für das elektromagnetische Feld

Es sei die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}'_{\mathrm{F,M+F}}[A_\nu, \partial_\mu A_\nu] = -\frac{1}{2\mu_0}(\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu) - j_\nu A^\nu,$$

mit j^μ einem festen Viererstrom und A^μ einem Vierervektor, der die dynamische Variable darstellt.

Bestimmen Sie die entsprechenden Euler–Lagrange-Gleichungen ($\mathcal{EL}1$). Vergleichen Sie das Resultat mit den Gleichungen ($\mathcal{EL}2$), die aus der Standard-Lagrange-Dichte für das elektromagnetische Feld folgen. Unter welcher Bedingung stimmen die Gleichungen ($\mathcal{EL}1$) und ($\mathcal{EL}2$) zusammen?

25. Eichinvarianz und Noether-Theorem

Die Standard-Lagrange-Dichte für das freie elektromagnetische Feld ist invariant unter der Transformation $A^\mu \to A^\mu + \epsilon^\mu$, wobei ϵ^μ ein beliebiger konstanter Vierervektor ist. Berechnen Sie den entsprechenden Noether-Strom und schreiben Sie die zugehörige Erhaltungsgleichung. Was erkennen Sie?