Übung Nr. 7

19. Ladung als Lorentz-Skalar

Für den Viererstrom $j^\mu(x)$ gilt die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$. Zeigen Sie, dass dann die Größe $q = \int d^3\vec{r}\, j^0(x)/c$ ein Lorentz-Skalar ist. Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass q in der Form

$$q = \frac{1}{c}\int_{x^0=\text{const.}} d\sigma_\mu\, j^\mu$$

umschrieben werden kann, wobei

$$d\sigma_\mu = \frac{1}{6}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, d\tau^{\nu\rho\sigma}$$

ein 4-Vektor ist und $d\tau^{\nu\rho\sigma}$ ein antisymmetrischer Tensor, der durch die Zuweisungen

$$d\tau^{012} = dx^0\, dx^1\, dx^2, \quad d\tau^{021} = -dx^0\, dx^2\, dx^1, \quad \text{usw.}$$

mit $x^0 = ct$ festgelegt ist. Damit stellen die $d\tau^{\nu\rho\sigma}$ dreidimensionale Hyperflächenelemente des Minkowski-Raums dar.

20. Drehimpuls

Betrachten Sie den 4-Tensor 3. Stufe

$$M^{\mu\nu\rho}(x) = T^{\mu\nu}(x)\, x^\rho - T^{\mu\rho}(x)\, x^\nu,$$

wobei $T^{\mu\nu}$ ein divergenzfreier symmetrischer Energieimpulstensor ist.

i. Zeigen Sie, dass $M^{\mu\nu\rho}$ der Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu M^{\mu\nu\rho} = 0$ genügt.

ii. Die Größen

$$J^{kl} = \int d^3\vec{r}\, M^{0kl} \quad k, l = 1, 2, 3$$

bilden einen antisymmetrischen 3-Tensor, aus dem man bekanntlich einen Axialvektor mit den Komponenten $A_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J^{kl}$ bilden kann. Welche Bedeutung hat dieser Axialvektor?

iii. Drücken Sie die Komponenten des Axialvektors aus **ii.** für den Fall des elektromagnetischen Felds durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus.

21. Kanonische Variablen in der Präsenz eines elektromagnetischen Felds

In der Vorlesung wurde die Wirkung $S = S_\text{M} + S_\text{M+F}$ eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld gegeben. Zeigen Sie, dass diese in Form des Integrals

$$S_\text{M} + S_\text{M+F} = -\int_a^b dx_\mu\, P^\mu$$

geschrieben werden kann. Hier ist $P^\mu = (H/c, \vec{\Pi})$, wobei H die Hamilton-Funktion und $\vec{\Pi}$ den kanonischen Impuls bezeichnen. Drücken Sie desweiteren H als Funktion von $\vec{\Pi}$ aus.

22. Levi-Civita-Tensor

Beweisen die folgenden Gleichungen, indem Sie die Konstanten N_1, N_2, N_3 berechnen

$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = N_1$
$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} = N_2\delta^\alpha_\mu$
$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} = N_3(\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu - \delta^\beta_\mu\delta^\alpha_\nu).$