Übung Nr. 6

16. Eindimensionale Ähnlichkeitsströmung

Im Bereich $x \geq 0$ ruht ein ideales Fluid mit Druck p_0 und Massendichte ρ_0; der Bereich $x < 0$ ist leer ($p = 0$, $\rho = 0$). Die adiabatische Zustandsgleichung des Fluids sei der Form

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma, \qquad \text{mit } \gamma > 1,$$

woraus die Schallgeschwindigkeit durch $c_s^2(\rho) = \partial p/\partial\rho$ bestimmt werden kann. Am Zeitpunkt $t = 0$ wird der Behälter des Fluids geöffnet und das Fluid strömt in den Bereich $x < 0$ ein. Das Ziel der Aufgabe ist, die Strömungsgeschwindigkeit $v(t, x)$ für $t > 0$ zu bestimmen.

i. Wir nehmen an, dass alle Abhängigkeit von x und t in der Kombination $u \equiv x/t$ auftritt. Zeigen Sie, dass die Kontinuitäts- und Euler-Gleichungen die folgenden Formen erhalten:

$$\begin{aligned}
[u - v(u)]\,\rho'(u) &= \rho(u)\,v'(u) \\
\rho(u)[u - v(u)]\,v'(u) &= c_s^2(\rho(u))\,\rho'(u),
\end{aligned}$$

wobei ρ' bzw. v' die Ableitungen von ρ bzw. v nach u bezeichnet.

ii. Zeigen Sie, dass die Strömungsgeschwindigkeit entweder die Gleichheit $u - v(u) = c_s(\rho(u))$ erfüllt oder konstant ist, wobei im ersten Fall die Schallgeschwindigkeit die Form $c_s^2(\rho) = c_s^2(\rho_0)(\rho/\rho_0)^{\gamma-1}$ hat.

iii. Leiten Sie aus den Ergebnissen von **i.** und **ii.** zuerst die Beziehung

$$v(u) = a + \frac{2}{\gamma - 1}\,c_s(\rho(u))$$

her, wobei a eine Konstante ist, dessen Wert durch die Bedingung fixiert wird, dass $v(u)$ innerhalb des Fluids stetig sei. Zeigen Sie letztendlich, dass in einem bestimmten u-Bereich der Betrag von v gegeben wird durch

$$|v(u)| = \frac{2}{\gamma + 1}[c_s(\rho_0) - u].$$

iv. Skizzieren Sie die Massendichte $\rho(u)$ sowie die Stromlinien $x(t)$ und zeigen Sie, dass die Information über die Eröffnung des Behälters links mit der Geschwindigkeit $2c_s(\rho_0)/(\gamma - 1)$ propagiert, während sie sich rechts mit der Schallgeschwindigkeit $c_s(\rho)$ bewegt.

17. Strömung an einer oszillierenden Wand (Zweites Stokes'sches Problem)

Es sei eine unendlich ausgedehnte ebene Wand ($y = 0$), die einer Schwingungsbewegung mit der Geschwindigkeit $U\cos(\omega t)\,\vec{e}_x$ unterliegt. Im Bereich $y > 0$ befindet sich ein inkompressibles Newtonsches Fluid mit der kinematischen Scherviskosität ν. Wir nehmen an, dass Volumenkräfte vernachlässigbar sind, dass der Druck gleichförmig und stationär bleibt, und dass die durch die Schwingungen induzierte Strömung des Fluids von der x-Koordinate nicht abhängt.

i. Bestimmen Sie die Strömungsgeschwindigkeit $v(t, x)$ und plotten Sie das Resultat.

ii. Was ist die charakteristische Dicke der mitschwingenden Fluidschicht in der Nähe der Wand? Kommentieren Sie das Ergebnis.

18. Ähnlichkeitsbetrachtungen bei der Strömung in Röhren

Der Zusammenhang zwischen dem Druckgefälle pro Längeneinheit $\Delta p/L$ und der mittleren Strömungsgeschwindigkeit $\langle v\rangle$ werde für ein gegebenes Rohr und ein bestimmtes Fluid gegeben durch

$$\frac{\Delta p}{L} = C\langle v\rangle^n,$$

wobei C eine Größe ist, die von der Massendichte ρ, der kinematischen Scherviskosität ν und dem Rohrradius a abhängen kann. n ist eine Zahl, die vom Strömungszustand abhängt: $n = 1$ für den laminaren Strömungszustand (Hagen–Poiseuille-Gesetz, vgl. Vorlesung), $n = 1,75$ bzw. $n = 1,722$ für den turbulenten Strömungszustand nach Hagen (1854) bzw. Reynolds (1883).

Unter der Annahme, dass C ein Produkt von Potenzen von ρ, ν und a ist, bestimmen Sie die Exponenten dieser Potenzen aus einer Dimensionsbetrachtung.