Übung Nr. 5

13. Unviskose Burgers-Gleichung

Falls in der eindimensionalen Euler-Gleichung der Druck vernachlässigt wird, ergibt sich die sogenannte *unviskose Burgers-Gleichung*

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + v(t,x)\,\frac{\partial v(t,x)}{\partial x} = 0.$$

i. Zeigen Sie, dass die Lösung durch die implizite Gleichung $v(0,x) = v(t, x + v(0,x)\,t)$ gegeben wird, wobei $v(0,x)$ die Anfangsbedingung darstellt.

Hinweis: `http://en.wikipedia.org/wiki/Burgers'_equation`

ii. Sei $v(0,x) = v_0 \mathrm{e}^{-(x/x_0)^2}$ die Anfangsbedingung, mit v_0 und x_0 zwei Konstanten. Zeigen Sie, dass am Zeitpunkt $t = \sqrt{\mathrm{e}/2}\,x_0/v_0$ eine Unstetigkeit entsteht, und zwar vorerst bei $x = x_0\sqrt{2}$.

14. Wärmediffusion und Dämpfung

In der Vorlesung wurde die Gleichung

$$\frac{\partial e(t,\vec{x})}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot[\kappa\vec{\nabla}T(t,\vec{x})]$$

hergeleitet, wobei κ die Wärmeleitfähigkeit bezeichnet. Seien $C \equiv \partial e/\partial T$ und κ Konstanten und $\chi \equiv \kappa/C$. Lösen Sie $T(t,\vec{x})$ für $z < 0$ mit der Randbedingung, dass auf der Ebene $z = 0$ die Temperatur räumlich konstant ist und die Zeitabhängigkeit $T = T_0\cos(\omega t)$ aufzeigt. In welcher Tiefe sind die Wärmeschwankungen 10 % derjenigen auf der Ebene $z = 0$?

15. Taylor–Couette-Strömung. Messung der Scherviskosität

In einem Couette-Viskosimeter befindet sich die zu messende viskose Flüssigkeit in einem Ringspalt zwischen zwei konzentrischen Zylindern mit der Höhe L: der äußere (Radius R_2) Zylinder rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_2, während der Innenzylinder (Radius R_1) still bleibt. Die Strömung der Flüssigkeit wird zweidimensional, inkompressibel und stationär angenommen.

i. Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung zu $v_r = 0$ führt, wobei v_r die Radialkomponente (in einem Zylinderkoordinatensystem) der Strömungsgeschwindigkeit bezeichnet.

ii. Zeigen Sie, dass die Navier–Stokes-Gleichung die Gleichungen

$$\frac{v_\varphi(r)^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p(r)}{\partial r} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 v_\varphi(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi(r)}{\partial r} - \frac{v_\varphi(r)}{r^2} = 0 \tag{2}$$

liefert. Was ist die Bedeutung der Gl. (1)? Lösen Sie die Gl. (2) mit dem Ansatz $v_\varphi(r) = ar + \dfrac{b}{r}$.

iii. Man kann zeigen, dass die $r\varphi$-Komponente des Spannungstensors durch

$$\sigma_{r\varphi} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right)$$

gegeben wird. Zeigen Sie, dass $\sigma_{r\varphi} = -\dfrac{2b\eta}{r^2}$, wobei b derselbe Koeffizient wie oben ist.

iv. An der Wand des Innenzylinders wird ein Drehmoment $\mathcal{M}_z$ gemessen. Wie ergibt sich die Scherviskosität η aus dieser Messung?
Numerisches Beispiel: es seien $R_1 = 10$ cm, $R_2 = 11$ cm, $L = 10$ cm, $\Omega_2 = 10$ rad·s^{-1} und $\mathcal{M}_z = 7{,}246\cdot 10^{-3}$ N·m.