

Übung Nr. 3

7. Isotropie des Drucks

In einem ruhenden Fluid sind die mechanischen Spannungen in einem Punkt \vec{r} normal: $\tau_s(\vec{r}) = -p(\vec{r})\vec{n}$. Zeigen Sie, dass in einem Fluid der Druck p unabhängig von der Richtung \vec{n} ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Kräfte auf einem Elementartetraeder, von dem drei Seiten orthogonal zueinander sind.

8. Energieimpulstensor

Zeigen Sie mithilfe einer Lorentz-Transformation, dass der Energieimpulstensor eines idealen Fluids in einem Bezugssystem, das sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} bezüglich des lokalen Ruhesystems des Fluids bewegt, zur Ordnung $\mathcal{O}(|\vec{v}|/c)$ gegeben ist durch

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \epsilon & (\epsilon + p)\frac{v_x}{c} & (\epsilon + p)\frac{v_y}{c} & (\epsilon + p)\frac{v_z}{c} \\ (\epsilon + p)\frac{v_x}{c} & p & 0 & 0 \\ (\epsilon + p)\frac{v_y}{c} & 0 & p & 0 \\ (\epsilon + p)\frac{v_z}{c} & 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie dieses Resultat mit der in der Vorlesung gegebenen allgemeinen Formel für $T^{\mu\nu}$ nach.

9. Modell eines Sterns

In einem vereinfachten Modell wird die Sternmaterie als ein in einer Kugel kondensiertes Fluid (ein Plasma) mit der gleichförmigen Massendichte ρ modelliert. Es wird angenommen, dass dieses Fluid unter dem Einfluss des kinetischen Drucks und der Schwerkraft in Gleichgewicht ist.

- i. Berechnen Sie das Gravitationsfeld in einem Abstand r vom Sternzentrum.
- ii. Schreiben Sie die Gleichgewichtsgleichung des Fluids unter der Annahme, dass der kinetische Druck nur von r abhängt, und bestimmen Sie die Funktion $p(r)$. Bestimmen Sie den Druck im Sternzentrum in Abhängigkeit von der Masse M und dem Radius R des Sterns. Berechnen Sie den numerischen Wert des Drucks im vereinfachten Modell für $M = 2 \cdot 10^{30}$ kg (Sonnenmasse) und $R = 7 \cdot 10^8$ m (Sonnenradius).
- iii. Es wird angenommen, dass die Sternmaterie aus einem elektrisch neutralen Gemisch (Plasma) von Wasserstoffkernen und Elektronen besteht. Zeigen Sie, dass die Größenordnung der gesamten Teilchendichte des Plasmas $n \approx \rho/2m_N$ ist, mit m_N der Masse eines Nukleons. Berechnen Sie eine Größenordnung für die Temperatur im Zentrum der Sonne.

Hinweis: $m_N = 1,6 \cdot 10^{-27}$ kg; $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J·K⁻¹.