Übung Nr. 12

34. Einfache Modelle für die konstitutiven Gleichungen

In dieser Aufgabe werden *klassische* Modelle dargelegt, die korrekte funktionale Formen für die Leitfähigkeit eines elektrischen Leiters und die dielektrische Funktion eines Dielektrikums liefern. Dabei werden Ladungsträger (Ladung q, Masse m) in einem makroskopischen Körper durch ein homogenes externes elektrisches Feld $\vec{E}(t)$ beschleunigt und durch Stöße abgebremst, mit einer Kraft $-m\Gamma\vec{v}(t)$ proportional zur Geschwindigkeit ($\Gamma > 0$).

i. Elektrische Leitfähigkeit: Drude-Modell

Zunächst werden als Ladungsträger nur die *freien* Ladungen in einem Leiter betrachtet.

(a) Zeigen Sie, dass das Grundprinzip der Dynamik die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{\Gamma t}\vec{v}(t)] = \frac{q}{m}\,\mathrm{e}^{\Gamma t}\vec{E}(t)$$

für die Bewegung eines Ladungsträgers liefert.

Folgern Sie daraus, dass die Stromdichte im Leiter durch

$$\vec{J}(t) = \frac{n_\mathrm{f} q^2}{m}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{e}^{-\Gamma\tau}\,\vec{E}(t-\tau) \tag{1}$$

gegeben ist, wobei n_f die (konstante) Dichte von freien Ladungsträgern bezeichnet.

(b) Sei $\tilde{\vec{E}}(\omega)$ bzw. $\tilde{\vec{J}}(\omega)$ die Fourier-Transformierte des elektrischen Felds bzw. der Stromdichte. Wie lautet Gl. (1) im Fourier-Raum? Lesen Sie daraus die elektrische Leitfähigkeit $\sigma(\omega)$ ab.

(c) Zeigen Sie die „Summenregel“ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\,\sigma(\omega) = \frac{n_\mathrm{f} q^2}{m}\pi.$

ii. Dielektrische Funktion: Lorentz-Drude-Modell

Jetzt sind die Ladungsträger an „Gleichgewichtsstellen“ *gebunden*. Der Einfachheit halber wird für die Bindungskraft das Modell eines harmonischen Oszillators $\vec{F}(t) = -m\omega_0^2\vec{r}(t)$ angenommen, mit $\vec{r}(t)$ der Verschiebung des Ladungsträgers aus seiner Gleichgewichtsstelle und ω_0 einer Kreisfrequenz.

(a) Sei n_g die Dichte von gebundenen Ladungsträgern. Zeigen Sie mithilfe des Grundprinzips der Dynamik, dass die Polarisation $\vec{P} = n_\mathrm{g} q\vec{r}$ der Gleichung im Fourier-Raum

$$\tilde{\vec{P}}(\omega) = \frac{n_\mathrm{g} q^2}{m}\frac{\tilde{\vec{E}}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\Gamma}$$

genügt. Geben Sie die elektrische Suszeptibilität $\chi_\mathrm{e}(\omega)$ und die relative dielektrische Funktion $\epsilon_r(\omega)$ an.

(b) Zeigen Sie die Summenregel $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\,(-\mathrm{i}\omega)\chi_\mathrm{e}(\omega) = \frac{n_\mathrm{g} q^2}{m}\pi.$

35. Wellen im Metall

Betrachtet wird ein Metall mit der relativen dielektrischen Funktion

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega(\omega + \mathrm{i}\Gamma)}$$

und der konstanten Permeabilität $\mu(\omega) = \mu_0$. Keine externen Ladungen sind vorhanden: $\varrho_{\text{ext}} = 0$, $\vec{J}_{\text{ext}} = \vec{0}$.

i. Sei zuerst $\Gamma \ll \Omega \ll \omega$. Zeigen Sie, dass der Brechungsindex $n = n_r + \mathrm{i}n_i$ in diesem Bereich reell ist, mit $n_r \approx 1$. (Physikalisch bedeutet dies, dass das Metall im ultravioletten Bereich *transparent* ist.)

ii. Sei jetzt $\Gamma \ll \omega \ll \Omega$. Zeigen Sie, dass der Brechungsindex $n = n_r + \mathrm{i}n_i$ in diesem Bereich rein imaginär ist. (Physikalisch bedeutet dies, dass keine Wellenbewegung stattfinden kann und dass das Metall das Licht vollständig *reflektiert*, d.h. als Spiegel funktioniert.)

iii. Letztendlich wird der Fall $\omega \ll \Gamma \ll \Omega$ betrachtet. Eine Welle bewege sich in die positive z-Richtung. Zeigen Sie, dass ihr Betrag als $|\vec{E}| \sim \exp(-z/d_{\text{skin}})$ gedämpft wird, mit $d_{\text{skin}} = c/\sqrt{\sigma\omega/2\epsilon_0}$, wobei $\sigma = \epsilon_0\Omega^2/\Gamma$ die Leitfähigkeit ist. Dieser Effekt heißt *Skineffekt*.

36. Telegraphengleichung

Sei $\epsilon_r(\omega) = \epsilon_{r,0} - \Omega^2/\mathrm{i}\omega\Gamma$ und $\mu(\omega) = \mu_r\mu_0$. Zeigen Sie, dass das elektrische Feld die sogenannte Telegraphengleichung erfüllt:

$$\left(\triangle - \frac{1}{c_{\text{eff}}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E}(t,\vec{r}) = \frac{\mu_r\sigma}{\epsilon_0 c^2}\frac{\partial\vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t},$$

wobei $c_{\text{eff}} = \dfrac{c}{\sqrt{\epsilon_{r,0}\mu_r}}$ und $\sigma = \epsilon_0\dfrac{\Omega^2}{\Gamma}$.

Ursprünglich wurde diese Gleichung zur Beschreibung der Fortpflanzung von Telegraphiesignalen auf Seekabeln eingeführt.