# Übung Nr.9

## 35. Schrödinger-Gleichung mit $\delta$-Potential

Bestimmen Sie die stationären Lösungen der eindimensionalen Schrödinger-Gleichung für das Potential

$$V(x) = -\Omega\delta(x) \quad \text{mit } \Omega > 0. \tag{1}$$

Wie viele gebundene Zustände gibt es? Wie groß ist die zugehörige (Bindungs)Energie?

*Hinweis*: Da das Potential $\delta(x)$ enthält, ist $\psi(x)$ zwar stetig bei $x = 0$, $\psi'(x)$ jedoch nicht mehr. Die Anschlussbedingung für $\psi'$ erhalten Sie dann, indem Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung über $x \in [-\epsilon, \epsilon]$ (mit $\epsilon > 0$) integrieren und anschließend den Limes $\epsilon \to 0$ durchführen.

## 36. Schrödinger-Gleichung mit Doppel-$\delta$-Potential

Bestimmen Sie die Energien der gebundenen Zustände im Potential

$$V(x) = -\Omega\big[\delta(x+a) + \delta(x-a)\big] \quad \text{mit } a, \Omega > 0, \tag{2}$$

was ein (sehr) grobes Modell für ein zweiatomiges Molekül darstellen könnte.

## 37. Streuung am $\delta$-Potential

Betrachten Sie das Potential (1), aber jetzt mit $E = \hbar^2k^2/2m > 0$. Sei weiterhin $\Omega \equiv \hbar^2\kappa/m$. Berechnen Sie die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten $R$ und $T$ für die Streuung an diesem Potential.

## 38. Schrödinger-Gleichung mit $1/\cosh^2$-Potential

Ein Teilchen mit Masse $m$ befinde sich im Potential

$$V(x) = -\frac{\hbar^2a^2}{m}\frac{1}{[\cosh(ax)]^2} \quad \text{mit } a > 0. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass das Potential einen Bindungszustand mit der Wellenfunktion $\psi_0(x) = A/\cosh(ax)$ hat. Finden Sie dessen Energie $E_0$, normieren Sie $\psi_0$ und skizzieren Sie diese Lösung.

## *39. Schrödinger-Gleichung mit $1/\cosh^2$-Potential (2)

**i.** Lösen Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung für das Potential (3) für positive Energien $E > 0$.

Dabei können Sie z.B. wie folgt vorgehen: per Ansatz $\psi(x) = \varphi(\tanh(ax))\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ mit $k \equiv \sqrt{2mE/\hbar^2}$ verschaffen Sie sich eine Differentialgleichung für $\varphi(t)$ in der Variablen $t \equiv \tanh(ax)$. Mit Potenzreihenansatz für $\varphi(t)$ und Abbruchbedingung (d.h. die Potenzreihe für $\varphi(t)$ soll nur endlich viele Terme enthalten) erhalten Sie dann eine elementare Lösung.]

**ii.** Wie verhält sich Ihre Lösung aus **i.** bei $x \to -\infty$? Was bedeutet das für Transmissions- und Reflexionskoeffizienten für die Streuung an diesem Potential?