Übung Nr.8

30. Gauß'sches Wellenpaket

Die Wellenfunktion in Ortsdarstellung eines zeitunabhängigen eindimensionalen *Gauß'schen Wellenpakets* sei für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\langle x \,|\, \psi \rangle \equiv \psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{\sigma}} \exp\left(\mathrm{i}kx - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1}$$

gegeben, wobei $\sigma > 0$.

Überprüfen Sie, ob der Zustandsvektor $|\psi\rangle$ normiert ist. Bestimmen Sie die Erwartungswerte im Zustand $|\psi\rangle$ der Operatoren $\hat{x}$, $\hat{x}^2$, $\hat{p}$ und $\hat{p}^2$. Folgern Sie daraus das Produkt aus den Erwartungswerten der Varianzen $(\Delta\hat{x})^2$ und $(\Delta\hat{p})^2$.

Hinweis: Zur Erinnerung gelten $\langle x'' \,|\, \hat{x} \,|\, x' \rangle = x'\delta(x'' - x')$ und $\langle x'' \,|\, \hat{p} \,|\, x' \rangle = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x''}\delta(x'' - x')$.

31. Funktionen auf dem Intervall $[0, L]$ mit Randbedingung

Man betrachte die stetigen komplexwertigen Funktionen f auf dem Intervall $[0, L]$, die an den Endpunkten verschwinden, d.h. $f(0) = f(L) = 0$.

Auf dem Intervall sei ebenfalls ein Funktionensystem gegeben:

$$\langle x \,|\, u_n \rangle \equiv u_n(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\frac{n\pi x}{L} \quad \text{für } n = 1, 2, ... \tag{2}$$

i. Überprüfen Sie, ob die Vektoren $\{|u_n\rangle\}$ ein Orthonormalsystem bilden.

ii. Wie gut kann man die folgende Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ 2(L - x) & \text{für } \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

durch die ersten N Funktionen $|u_n\rangle$ approximieren? Stellen Sie das Ergebnis graphisch dar für $N = 1$, $N = 5$ und $N = 10$, z.B. mit Mathematica.

iii. Es liegt nahe, zu vermuten, dass die Funktionen $\{|u_n\rangle\}$ eine Basis im Vektorraum der stetigen Funktionen von $[0, L]$ nach $\mathbb{C}$ mit $f(0) = f(L) = 0$ bilden. Wie könnte man das beweisen?

32. Orts- und Impulsoperatoren

Man betrachte den (Hilbert-)Raum der beliebig oft differenzierbaren und quadratintegrablen Funktionen f auf dem Intervall $[0, L]$, die an den Endpunkten verschwinden, d.h. $f(0) = f(L) = 0$.

Sind die Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$ auf diesem Raum hermitesch? Gehen Sie dabei von den folgenden Definitionen aus:

$$\langle f \,|\, \hat{x} \,|\, g \rangle \equiv \int_0^L [f(x)]^* x g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \langle f \,|\, \hat{p} \,|\, g \rangle \equiv \int_0^L [f(x)]^* \left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) g(x)\,\mathrm{d}x.$$

33. Schrödinger-Gleichung für freie Teilchen

i. Verifizieren Sie durch direktes Einsetzen, dass die reellen Funktionen $\psi_1(t, x) = \mathcal{N}\sin(kx - \omega t)$ und $\psi_2(t, x) = \mathcal{N}\cos(kx - \omega t)$ *keine* Lösungen der Schrödinger-Gleichung für freie Teilchen sind.

ii. Verifizieren Sie, dass die Wellenfunktion $\psi(t,x) = \mathcal{N}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} - \mathcal{N}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx+\omega t)}$ (mit $\mathcal{N} \in \mathbb{C}$) die freie Schrödinger-Gleichung löst, falls $\hbar\omega = \hbar^2 k^2/2m$ gilt. Zeigen Sie, dass $\psi(t,x) = 2\mathrm{i}\mathcal{N}\sin(kx)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$. Was für eine Art Welle ist das?

*34. Wellenfunktion

Bestimmen Sie für ein eindimensionales System mit Wellenfunktion in Ortsdarstellung

$$\langle x\,|\,\psi\rangle \equiv \psi(x) = \frac{\mathcal{N}}{x^2 + a^2} \qquad (\text{mit } a \in \mathbb{R})$$

- die Normierungskonstante $\mathcal{N}$,
- die Erwartungswerte im Zustand $|\psi\rangle$ der Operatoren $\hat{x}$, $\hat{x}^2$, $\hat{p}$ und $\hat{p}^2$,
- die Wellenfunktion in Impulsdarstellung $\psi(k)$.