Übung Nr.7

26. Unbestimmtheitsrelation

i. Berechnen Sie die Erwartungswerte der Operatoren $(\Delta_\psi \hat{S}_x)^2$ und $(\Delta_\psi \hat{S}_y)^2$ im Zustand $|\psi\rangle = |S_z^+\rangle$. Überprüfen Sie, ob die Unbestimmtheitsrelation mit $\hat{A} = \hat{S}_x$ und $\hat{B} = \hat{S}_y$ erfüllt ist.

ii. Führen Sie die gleiche Überprüfung für $\hat{A} = \hat{S}_x$ und $\hat{B} = \hat{S}_y$ und den Zustand $|\psi\rangle = |S_x^+\rangle$ durch.

27. Spinpräzession in einem festen Magnetfeld

Das magnetische Dipolmoment $\hat{\vec{\mu}}$ und der Spin-Operator $\hat{\vec{S}}$ eines Teilchens mit dem Spin $\frac{1}{2}$ seien verbunden durch

$$\hat{\vec{\mu}} = \gamma \hat{\vec{S}},$$

wobei γ das sog. *gyromagnetische Verhältnis* ist.

Wenn das Teilchen sich in einem konstanten und homogenen Magnetfeld $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ entlang der z-Achse befindet, lautet dessen Hamilton-Operator[1]

$$\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B}_0 = -\gamma B_0 \hat{S}_z. \tag{1}$$

Wie in der Vorlesung werden die Eigenzustände zum Operator $\hat{S}_z$ mit $|S_z^+\rangle$, $|S_z^-\rangle$ bezeichnet.

i. Sei $|\psi(t)\rangle$ der Zustandsvektor des Teilchens. Bei $t = 0$ gilt $|\psi(0)\rangle = \alpha|S_z^+\rangle + \beta|S_z^-\rangle$, wobei α und β zwei komplexe Zahlen sind. Zeigen Sie, dass zu einem späteren Zeitpunkt t der Zustandsvektor durch

$$|\psi(t)\rangle = \alpha\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t/2}|S_z^+\rangle + \beta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t/2}|S_z^-\rangle \quad \text{mit} \quad \omega_0 \equiv -\gamma B_0 \tag{2}$$

gegeben ist. ω_0 heißt *Larmor-Frequenz*.

ii. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $\langle\hat{\vec{\mu}}\rangle$ des magnetischen Dipolmoments im Zustand $|\psi(t)\rangle$ durch

$$\langle\hat{\mu}_x\rangle = 2\mu\, \mathrm{Re}\,(\alpha^*\beta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}), \qquad \langle\hat{\mu}_y\rangle = 2\mu\, \mathrm{Im}\,(\alpha^*\beta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}), \qquad \langle\hat{\mu}_z\rangle = \mu\,(|\alpha|^2 - |\beta|^2).$$

mit $\mu \equiv \gamma\hbar/2$ gegeben ist. Warum ist $\langle\hat{\mu}_z\rangle$ zeitunabhängig? Schreiben Sie die x- bzw. y-Komponente mithilfe der Amplitude C und der Phase ϕ der komplexen Zahl $\mu\,\alpha^*\beta$ um. Was für eine Bewegung hat die Projektion von $\langle\hat{\vec{\mu}}\rangle$ auf die (x, y)-Ebene? Was für eine Bewegung hat $\langle\hat{\vec{\mu}}\rangle$?

28. Bestimmung der Larmor-Frequenz

Das System sei das gleiche wie in Aufgabe **27.** Neben dem festen Magnetfeld $\vec{B}_0$ entlang der z-Achse wird ein zweites (schwächeres) Magnetfeld $\vec{B}_1$ eingeführt, das in der (x, y)-Ebene mit der Kreisfrequenz ω rotiert; somit lautet nun der Hamilton-Operator

$$\hat{H}(t) = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \left(\vec{B}_0 + \vec{B}_1(t)\right) = -\gamma B_0 \hat{S}_z - \gamma B_1 \cos(\omega t)\, \hat{S}_x - \gamma B_1 \sin(\omega t)\, \hat{S}_y. \tag{3}$$

i. Zeigen Sie, dass die Schrödinger-Gleichung für den Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle = c_+(t)|S_z^+\rangle + c_-(t)|S_z^-\rangle$ zu den folgenden gekoppelten Differentialgleichungen führt:

$$\begin{cases} \mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{d}c_+}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega_0}{2}\, c_+(t) + \dfrac{\omega_1}{2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} c_-(t) \\[2ex] \mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{d}c_-}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega_1}{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} c_+(t) - \dfrac{\omega_0}{2}\, c_-(t), \end{cases} \quad \text{mit} \quad \omega_0 \equiv -\gamma B_0 \text{ und } \omega_1 \equiv -\gamma B_1. \tag{4}$$

[1] Die Spin- und Orts- bzw. Impulsfreiheitsgrade des Teilchens sind unabhängig voneinander, sodass wir nur den Spin-Anteil des Hamilton-Operators in Betracht ziehen können.

ii. Überprüfen Sie, dass das Ersetzen der Funktionen $c_\pm(t)$ durch $b_\pm(t) \equiv \exp(\pm \mathrm{i}\omega t/2)\, c_\pm(t)$ das einfachere System

$$\begin{cases} \mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{d}b_+}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\omega-\omega_0}{2}\, b_+(t) + \dfrac{\omega_1}{2}\, b_-(t) \\ \mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{d}b_-}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega_1}{2}\, b_+(t) + \dfrac{\omega-\omega_0}{2}\, b_-(t) \end{cases}$$

ergibt. Prüfen Sie, dass dies impliziert

$$\frac{\mathrm{d}^2 b_\pm}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 b_\pm(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \Omega^2 \equiv (\omega-\omega_0)^2 + \omega_1^2. \tag{5}$$

iii. Der Spin sei zu $t = 0$ im Zustand $|S_z^+\rangle$, was $b_-(0) = c_-(0) = 0$ entspricht. Was sind die normierten Lösungen von Gl. (5)? Erklären Sie, warum die Wahrscheinlichkeit, den Wert $-\hbar/2$ bei einer Messung von $\hat{S}_z$ zum Zeit t zu finden, durch

$$\mathcal{P}_{+\to-}(t) = \left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 \sin^2\frac{\Omega t}{2}$$

gegeben ist. Diskutieren Sie dieses Ergebnis für verschiedene Werte von ω: Warum erlaubt die Messung der Wahrscheinlichkeit des $|S_z^+\rangle \to |S_z^-\rangle$-Übergangs eine präzise Bestimmung[2] der Larmor-Frequenz ω_0 und hierbei (bei bekanntem Magnetfeld B_0) des gyromagnetischen Faktors γ?

*29. System mit einem dreidimensionalen Hilbert-Raum

Der Hamilton-Operator eines Systems sei durch

$$\hat{H} \cong \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mit $\omega > 0$ gegeben. Zwei weitere Observablen des Systems seien durch

$$\hat{A} \cong \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{B} \cong \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda > 0$ und $\mu > 0$ definiert.

i. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenzustände zu $\hat{H}$, $\hat{A}$ und $\hat{B}$.

ii. Das System sei zur Zeit $t = 0$ im Zustand

$$|\psi(0)\rangle \cong \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

wobei $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$. Bestimmen Sie $|\psi(t)\rangle$. Welche Energiewerte kann das System im Zustand $|\psi(t)\rangle$ annehmen und was sind deren jeweiligen Wahrscheinlichkeiten? Beantworten Sie die gleichen Fragen für die Observablen $\hat{A}$ und $\hat{B}$.

[2] Die Idee dieser Messmethode geht auf Isidor Rabi zurück.