Übung Nr.6

In Aufgaben **21.–22.** sind $|a\rangle$, $|b\rangle$ beliebige Ket-Vektoren eines Hilbert-Raums $\mathscr{H}$; $\langle a|$, $\langle b|$ die damit assoziierten Bra-Vektoren; $\{|n\rangle\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathscr{H}$; und $\hat{A}$ ein Operator $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$.

21. Bra-Ket-Notation: Skalarprodukt

Prüfen Sie anhand der in der Vorlesung gegebenen Definitionen und Notationen, dass das „Matrixelement“ $\langle a|\hat{A}|b\rangle$ den gleichen Wert annimmt, egal ob $\hat{A}$ erstens auf seine Rechte oder auf seine Linke wirkt.

22. Bra-Ket-Notation: Operatoren

i. Ein Operator auf $\mathscr{H}$ sei als $\hat{X} \equiv |b\rangle\langle a|$ definiert. Charakterisieren Sie die Wirkung von $\hat{X}$, indem Sie dessen *Kern* — die Menge der Elemente von $\mathscr{H}$, die auf den Nullvektor abgebildet sind — und dessen *Bild* angeben. Unter welcher Bedingung ist $\hat{X}$ diagonalisierbar?

ii. Sei angenommen, dass alle Skalarprodukte $\langle n|a\rangle$ und $\langle n|b\rangle$ (für alle $|n\rangle$) bekannt sind. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von $\hat{X}$ in der Basis $\{|n\rangle\}$.

iii. Zeigen Sie, dass $\hat{X}^\dagger = |a\rangle\langle b|$. Wann ist $\hat{X}$ hermitesch?

23. Spin-Eigenzustand entlang einer beliebigen Richtung

Sei $\vec{e}_{(\theta,\varphi)}$ der Einheitsvektor (im euklidischen Raum Ihres Alltagslebens!) in Richtung (θ,φ), wobei θ und φ die üblichen Polar- und Azimutwinkel eines Kugelkoordinatensystems sind.[1] Mithilfe dessen kartesischen Komponenten (e^x, e^y, e^z) und der drei Spin-Operatoren $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ aus der Vorlesung kann man einen Operator

$$\hat{S}_{(\theta,\varphi)} \equiv \vec{e}_{(\theta,\varphi)} \cdot \hat{\vec{S}} \equiv e^x \hat{S}_x + e^y \hat{S}_y + e^z \hat{S}_z$$

bilden, dessen Eigenvektoren $|S^+_{(\theta,\varphi)}\rangle$, $|S^-_{(\theta,\varphi)}\rangle$ durch

$$\hat{S}_{(\theta,\varphi)}|S^\pm_{(\theta,\varphi)}\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|S^\pm_{(\theta,\varphi)}\rangle$$

definiert sind.

i. Bestimmen Sie diese Eigenvektoren, ausgedrückt durch die Eigenvektoren $|S^+_z\rangle$, $|S^-_z\rangle$ zum Operator $\hat{S}_z$.

ii. Sei angenommen, dass sich ein Spin-$\frac{1}{2}$-System im Zustand $|S^+_{(\theta,\varphi)}\rangle$ befindet.

a) Was ist die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung von S_z, den Wert $+\hbar/2$ zu finden?

b) Bestimmen Sie die Varianz von $\hat{S}_z$ in diesem Zustand, d.h. den Erwartungswert

$$\langle S^+_{(\theta,\varphi)}|\big(\hat{S}_z - \langle\hat{S}_z\rangle\big)^2|S^+_{(\theta,\varphi)}\rangle.$$

24. Exponential eines Operators

In der Vorlesung wurde ein Operator $\hat{\sigma}_z$ definiert, mit dessen Hilfe sich der Spin-Operator in z-Richtung als $\hat{S}_z = (\hbar/2)\hat{\sigma}_z$ schreiben lässt. Sei $\theta \in [0, 2\pi]$. Bestimmen Sie $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta\hat{\sigma}_z/2}$, ausgedrückt durch $\hat{\sigma}_z$ und den 2-dimensionalen Identitätsoperator $\hat{\mathbb{1}}_2$, wobei das Exponential eines Operators in Aufgabe **19.** eingeführt wurde.

Hinweis: Berechnen Sie erstens $(\hat{\sigma}_z)^2$!

[1] Vgl. z.B. Abbildungen auf `https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten`

25. Stern–Gerlach-Versuch mit polarisiertem Licht

In manchen Lehrbüchern (z.B. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Kap. 1.1) wird eine Analogie entwickelt zwischen (Reihenschaltungen von) Stern–Gerlach-Versuchen mit Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen und ähnlichen Experimenten mit linear oder zirkular polarisiertem *klassischem* Licht.
Informieren Sie sich über diese Analogie (z.B.: $\vec{E}$-Felder analog zu den Eigenvektoren zu $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$) und erklären Sie sie Ihren Kommilitonen.