Übung Nr.5

16. Linearalgebra (1): Matrixdarstellung eines linearen Operators

Ein dreidimensionales Koordinatensystem sei durch eine Orthonormalbasis $\{\,|1\rangle,\,|2\rangle,\,|3\rangle\}$ gegeben. Der lineare Operator $\hat{A}$ drehe jeden Vektor um die 3-Achse um den Winkel 45^{o} entgegen dem Uhrzeiger, d.h. Vektoren des ersten Quadranten in der (1,2)-Ebene wandern in Richtung des zweiten Quadranten. Gleichzeitig strecke der Operator die Vektoren entlang der 3-Richtung um den Faktor 5.

Wie lautet die Matrixdarstellung des Operators bezüglich der Basis $\{\,|1\rangle,\,|2\rangle,\,|3\rangle\}$? Welcher Vektor ergibt sich, wenn man den Operator auf den Vektor $|\Psi\rangle = |1\rangle + 2\,|2\rangle + 3\,|3\rangle$ anwendet?

17. Linearalgebra (2): Cauchy–Schwarz-Ungleichung

Beweisen Sie die Cauchy–Schwarz Ungleichung

$$\big|\langle\psi\,|\,\chi\rangle\big|^2 \leq \langle\psi\,|\,\psi\rangle\langle\chi\,|\,\chi\rangle$$

für Vektoren $|\psi\rangle$, $|\chi\rangle$ des Hilbert-Raums. In welchem Fall gilt die Gleichung?

18. Linearalgebra (3): Projektionen

Wir betrachten eine Projektion in einem dreidimensionalen Vektorraum, der durch die orthonormalen Basisvektoren $\{\,|1\rangle,\,|2\rangle,\,|3\rangle\}$ aufgespannt wird.

i. a) Wiederholen Sie die Definition für einen Projektionsoperator. Überprüfen Sie, ob die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

die Matrixdarstellung eines Projektors ist. Welche Eigenschaft der Projektoren haben Sie benutzt?

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix P. Erklären Sie, warum gerade die von Ihnen gefundenen (recht speziellen) Eigenwerte auftreten. Beschreiben Sie verbal und mathematisch, worauf der Projektor projiziert.

ii. Seien $\hat{\mathcal{P}}_1$, $\hat{\mathcal{P}}_2$ zwei Projektoren eines Hilbert-Raums. Beweisen Sie die folgenden Ergebnisse:

a) $\hat{\mathcal{P}}_1\hat{\mathcal{P}}_2$ ist ein Projektor genau dann, wenn $\hat{\mathcal{P}}_1$ und $\hat{\mathcal{P}}_2$ vertauschbar sind, $\hat{\mathcal{P}}_1\hat{\mathcal{P}}_2 = \hat{\mathcal{P}}_2\hat{\mathcal{P}}_1$.

b) $\hat{\mathcal{P}}_1 + \hat{\mathcal{P}}_2$ ist ein Projektor genau dann, wenn $\hat{\mathcal{P}}_1\hat{\mathcal{P}}_2 = 0$.

19. Linearalgebra (4): eine nützliche Identität

Funktionen von Operatoren werden formal durch ihre Taylor-Reihe definiert, z.B.

$$\mathrm{e}^{\hat{A}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\hat{A}^n$$

Zeigen Sie, dass für zwei Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ sowie eine komplexe Zahl $t \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\mathrm{e}^{t\hat{A}}\hat{B}\,\mathrm{e}^{-t\hat{A}} = \hat{B} + t\big[\hat{A},\hat{B}\big] + \frac{t^2}{2!}\big[\hat{A},\big[\hat{A},\hat{B}\big]\big] + \cdots,$$

wobei die eckigen Klammern den Kommutator von Operatoren bezeichnen: $[\flat,\sharp] \equiv \flat\,\sharp - \sharp\,\flat$.

Hinweis: Definieren Sie $\hat{f}(t) \equiv \mathrm{e}^{t\hat{A}}\hat{B}\,\mathrm{e}^{-t\hat{A}}$ und berechnen Sie die Ableitungen $\mathrm{d}\hat{f}/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\hat{f}^2/\mathrm{d}t^2$ usw.

*20. Linearalgebra (5): weitere Identitäten

Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei Operatoren eines Hilbert-Raums, welche beide mit deren Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}]$ vertauschen.

i. a) Finden Sie eine Differentialgleichung 1. Ordnung, welcher die Funktion $\hat{f}(t) \equiv \mathrm{e}^{t\hat{A}}\,\mathrm{e}^{t\hat{B}}$ genügt. (*Hinweis:* Benutzen Sie das Ergebnis aus Aufgabe **19.**)

b) Folgern Sie daraus die Identität

$$\mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}} = \mathrm{e}^{\hat{A}}\,\mathrm{e}^{\hat{B}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}.$$

ii. Zeigen Sie die Identität

$$\mathrm{e}^{\hat{A}}\,\mathrm{e}^{\hat{B}} = \mathrm{e}^{\hat{B}}\,\mathrm{e}^{\hat{A}}\,\mathrm{e}^{[\hat{A},\hat{B}]},$$

wobei die Operatoren immer noch die gleichen Eigenschaften erfüllen.