Übung Nr.4

11. Relativistischer Dopplereffekt

Gegeben sei ein Inertialsystem $\mathcal{B}$, in dem ein Sender ruht. Dieser Sender emittiert eine elektromagnetische Welle mit dem Vierewellenvektor k:

$$\mathsf{k} = \begin{pmatrix} k^0 \\ \vec{k} \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit $k^0 \equiv \omega/c$.

Sei $\mathcal{B}'$ ein weiteres Inertialsystem, das sich bezüglich $\mathcal{B}$ mit der Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt. In $\mathcal{B}'$ befindet sich ein ruhender Beobachter, der das Licht wahrnimmt. O.B.d.A. können wir $\vec{v}$ so wählen, dass dieser Vektor in Richtung der k^3-Komponente zeigt. Die Projektion von $\vec{k}$ auf die (x^1, x^2)-Ebene wird mit $\vec{k}_\perp$ bezeichnet und der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{k}$ mit θ.

Die Transformation des Vierewellenvektors im Lorentz-Boost von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ ergibt dann

$$\omega' \equiv ck^{0'} = \gamma\big(\omega - vk^3\big), \quad \vec{k}'_\perp = \vec{k}_\perp, \quad k^{3'} = \gamma\left(k^3 - \frac{\omega v}{c^2}\right) \tag{2}$$

mit $v \equiv |\vec{v}|$.

i. Nutzen Sie die Ihnen bekannte (z.B. aus *Theoretische Physik I*) Dispersionsrelation von elektromagnetischen Wellen im Vakuum, um zu zeigen, dass der Vierewellenvektor k lichtartig ist.

ii. Zeigen Sie, dass

$$\omega' = \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,\omega \tag{3}$$

gilt. Drücken Sie dazu $k_\perp \equiv |\vec{k}_\perp|$ und k^3 mithilfe von θ und ω aus (*Hinweis:* geometrische Überlegungen) und setzen Sie diese Ausdrücke anschließend in die spezielle Lorentz-Transformation (2) ein. Wie lautet das Verhältnis ω'/ω für $\vec{v}$ parallel zu $\vec{k}$ („longitudinaler Doppler-Effekt“)? und für $\vec{v}$ senkrecht zu $\vec{k}$ („transversaler Doppler-Effekt“)?

12. Lorentz-Transformation des elektromagnetischen Feldes

Eine elektromagnetische ebene Welle mit elektrischem Feld $\vec{E}(t, \vec{r}) = E_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\, \vec{\mathrm{e}}_z$ breite sich in der (x, y)-Ebene aus, wobei $\vec{k} = k_x\vec{\mathrm{e}}_x + k_y\vec{\mathrm{e}}_y$. Bestimmen Sie das elektrische und magnetische Feld in einem Bezugssystem, das sich in x-Richtung mit Geschwindigkeit v bewegt.

Hinweis: Bestimmen Sie dazu den Feldstärketensor in beiden Bezugssystemen.

13. Elektromagnetische Welle

Betrachten Sie eine Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum der Form

$$A^\mu(\mathsf{x}) = \varepsilon^\mu f(n_\nu x^\nu), \tag{4}$$

mit x-unabhängigen Vierervektoren ε^μ, n^μ und einer differenzierbaren skalaren Funktion f. Dieser Ausdruck von $A^\mu(\mathsf{x})$ ist Lorentz-kovariant.

i. Wie lauten die Komponenten $F^{\mu\nu}(\mathsf{x})$ des zugehörigen Feldstärketensors?

ii. Überprüfen Sie, dass die Transformation $\varepsilon^\mu \to \varepsilon^\mu + \lambda n^\mu$ mit beliebigem $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Eichtransformation ist.

iii. Geben Sie den Ausdruck der Maxwell-Gleichungen im Vakuum an. Zeigen Sie, dass die Lösung (4) für $n_\mu n^\mu \neq 0$ eine sogenannte „reine Eichung“ ist, d.h. dass sie durch eine Eichtransformation in $A^\mu(\mathsf{x}) = 0$ wegtransformiert werden kann.

iv. Sei nunmehr $n_\mu n^\mu = 0$. Zeigen Sie, dass das Feld (4) der Lorenz-Eichbedingung automatisch genügt, obwohl die Eichung noch nicht fixiert wurde.

14. Pauli-Matrizen

Die sog. Pauli-Matrizen sind die drei (offensichtlich spurlosen) Matrizen

$$\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Berechnen Sie die Produkte $\sigma_i \sigma_j$ sowie die *Kommutatoren* $[\sigma_i, \sigma_j] \equiv \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$.
Hinweis: Diese mathematischen Ergebnisse werden in der Quantenmechanik relevant sein!

*15. Elektromagnetische Welle (2)

Fortsetzung der Aufgabe **13.**

v. Berechnen Sie die Lorentz-Invarianten des elektromagnetischen Feldes. Welche (aus *Theoretische Physik I*) bekannten Ergebnisse finden Sie?

vi. Zeigen Sie, dass $\varepsilon_\mu \varepsilon^\mu > 0$ für ein Feld gilt, das keine reine Eichung ist.[1]
Folglich kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varepsilon_\mu \varepsilon^\mu = 1$ ansetzen.

vii. Zeigen Sie, dass es möglich ist, durch eine Eichtransformation $\varepsilon^0 = 0$ anzusetzen. Welcher Eichung entspricht diese (nicht-Lorentz-kovariante) Bedingung? Zeigen Sie, dass n^0 zu 1 normiert werden kann und überprüfen Sie, dass man die bekannte Form von $\Phi(t, \vec{r})$ und $\vec{A}(t, \vec{r})$ für eine transversal polarisierte ebene Welle erhält.

[1] Wie in der Vorlesung wird hier die $(-, +, +, +)$-Metrik angenommen.