Übung Nr.3

6. Viererbeschleunigung

i. Die 4-Beschleunigung eines Punktteilchens mit 4-Geschwindigkeit u sei definiert durch

$$a^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau},$$

wobei τ die Eigenzeit des Teilchens bezeichnet. Zeigen Sie, dass das 4-Skalarprodukt $a^\mu u_\mu$ verschwindet.

ii. Das Teilchen bewege sich in x^3-Richtung. Drücken Sie die Komponenten a^μ der 4-Beschleunigung im Bezugssystem, in dem das Teilchen ruht, durch die gewöhnliche 3-Beschleunigung $\vec{w}$ aus. Zeigen Sie, dass $a_\mu a^\mu = \vec{w}^2$ gilt.

iii. Bestimmen Sie jetzt die Bahnkurve $x^3(t)$ (bzgl. eines festen Bezugssystems) eines Punktteilchens, das sich mit einer konstanten Beschleunigung $\vec{w}$ (bzgl. des momentanen Ruhesystems) in x^3-Richtung bewegt. Es sei $x^3 = \mathrm{d}x^3/\mathrm{d}t = 0$ zur Zeit $t = 0$.

iv. Um einen längeren Raumflug zu einem angenehmen Erlebnis zu machen, sollte man nicht auf die gewöhnliche Schwerkraft verzichten und in einem Raumschiff mit der konstanten Beschleunigung $|\vec{w}| = 9,8\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ reisen. Wie lange dauert eine Reise zur Andromedagalaxie (Entfernung $2,5 \cdot 10^6$ Lichtjahre) für die Reisenden?

7. Viererkraft (1)

Laut dem zweiten newtonschen Gesetz ist die Beschleunigung eines nicht-relativistischen Teilchens proportional zur Kraft $\vec{F}$, die auf das Teilchen wirkt. In der Vorlesung wurde eine verallgemeinerte, vierdimensionale Version dieser Beziehung postuliert:

$$m\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = F^\mu \quad \text{für } \mu = 0,1,2,3, \tag{1}$$

wobei u^μ die μ-te Komponente der Vierergeschwindigkeit und τ der Eigenzeit des Teilchens sind. Dabei ist F^μ die μ-te Komponente der „Viererkraft“, deren Raumkomponenten sich im nicht-relativistischen Limes auf die newtonsche Kraft reduzieren.

Wie lautet der Raumteil der Viererkraft? Und deren Zeitkomponente F^0? Was beschreibt die Zeitkomponente der Gleichung (1)?

Hinweis: Um F^0 zu finden, kann man das Lorentz-Quadrat der Vierergeschwindigkeit benutzen.

8. Viererimpuls-Erhaltung

Ein ruhender Atomkern mit Masse $M = 5m$ zerplatze in drei gleiche Teile (je Masse m), deren 3-Impuls-Beträge $|\vec{p}_i|$ auch gleich sind. Geben Sie $|\vec{p}_i|$ an und skizzieren Sie die drei 3-Impulse.

9. Levi-Civita-Tensor

Sei $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ der völlig antisymmetrische Levi-Civita-Tensor, mit der Konvention $\epsilon^{0123} = +1$. Beweisen die folgenden Gleichungen, indem Sie die Konstanten N_1, N_2, N_3 berechnen:

i. $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = N_1$;

ii. $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} = N_2\delta^\alpha_\mu$;

iii. $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} = N_3\big(\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu - \delta^\beta_\mu\delta^\alpha_\nu\big)$.

*10. Viererkraft (2)

Nehmen Sie an, dass, in Analogie zur Newtonschen Mechanik, ein skalares Potential $\Phi(\mathsf{x})$ existiert, wobei x der Orts-Vierervektor ist, sodass die Viererkraft als $F^\mu = -\partial^\mu \Phi$ geschrieben werden kann. Was gilt für den Betrag der Dreiergeschwindigkeit in einem statischen Feld? Ist dieses Ergebnis physikalisch sinnvoll?