

Übung Nr.2

2. Längenkontraktion

Wie werden Längenmessungen durchgeführt? Hierzu legt man einen Maßstab auf die zu messende Strecke und liest *gleichzeitig* die Positionen der Endpunkte ab. In Bezugssystemen \mathcal{B} und \mathcal{B}' werden identische ruhende Maßstäbe der Länge $l = l'$ verwendet, d.h. wenn sich beide Systeme relativ zueinander in Ruhe befinden sind sie gleich lang. Nun soll sich das System \mathcal{B}' relativ zu \mathcal{B} mit der Geschwindigkeit $\vec{u} = u \vec{e}_x$ entlang der x -Achse bewegen. Die Koordinatenachsen in beiden Bezugssystemen sind parallel zueinander.

Erfolgt die Bewegung parallel zu den Maßstäben, so misst ein Beobachter in Ruhe bezüglich \mathcal{B} , dass der relativ zu ihm bewegte Stab auf die Länge

$$l_{\parallel} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} l'_{\parallel} \quad (1)$$

verkürzt ist. Sind die Maßstäbe orthogonal zur Bewegungsrichtung, z.B. beide entlang der y -Richtung (die gleich der y' -Richtung in \mathcal{B}' ist), so stimmen beide Längen überein, $l_{\perp} = l'_{\perp}$. Dabei stellen die gestrichenen bzw. nicht-gestrichenen Größen die Längen dar, die durch einen in \mathcal{B}' bzw. \mathcal{B} ruhenden Beobachter gemessen werden.

- i. Beweisen Sie diese Aussagen, indem Sie die Lorentz-Transformation zwischen beiden System betrachten.
- ii. Ein in \mathcal{B}' ruhender Stab der Ruhelänge l' schließt mit der x' -Achse einen Winkel θ' ein. Welche Stablänge l und welchen Winkel θ zur x -Achse misst ein Beobachter in \mathcal{B} ?
- iii. Am LHC (Large Hadron Collider) finden nicht nur Proton-Proton-Kollisionen statt, sondern auch Blei-Blei-Stöße. Dabei werden Blei-Atomkerne (Ruhemasse $m_{\text{Pb}} \approx 194 \text{ GeV}/c^2$, Radius $R_{\text{Pb}} \approx 6,3 \text{ fm}$) zu einer Gesamtenergie von etwa 522 TeV beschleunigt.¹
 - a) Was ist ihre Geschwindigkeit (relativ zur Vakuumlichtgeschwindigkeit)?
 - b) Was ist ihr Radius entlang der Flugrichtung für einen Beobachter, der relativ zum LHC ruht?
 - c) Zwei Blei-Kerne mit je 522 TeV stoßen aufeinander. Sei angenommen, dass sie durch einander fliegen, ohne abgebremst zu werden. Wie lange dauert das Durchqueren der Kerne? Die Antwort können Sie entweder in Yoktosekunden ($1 \text{ ys} = 10^{-24} \text{ s}$) oder in fm/c ($1 \text{ fm}/c \approx 3,3 \text{ ys}$) angeben. Warum werden die stoßenden Kerne oft „kollidierende Pfannkuchen“ genannt?

3. Maßstabsparadoxon

Ein 20 m langer Stab liegt auf dem Boden vor einer 15 m langen Scheune. Ein olympischer Athlet hebt den Stab auf, läuft auf die Scheune mit einer Geschwindigkeit von $0,8c$ zu, betritt die Scheune durch die Vordertür und verlässt sie durch die Hintertür. Vorder- und Hintertür der Scheune öffnen und schließen sich automatisch und ohne Verzögerung.

- i. Wie lang erscheinen Stab und Scheune für den Athleten? Wie lang erscheinen sie für einen Freund des Athleten, der neben der Scheune steht?

¹1 eV (*Elektronenvolt*) ist die Energiemenge, um welche die kinetische Energie eines Elektrons zunimmt, wenn es eine Beschleunigungsspannung von 1 Volt durchläuft; $1 \text{ eV} \approx 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Dann sind $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$, $1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$ (Giga-, Teraelektronenvolt) und $1 \text{ GeV}/c^2 \approx 1,783 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Schließlich ist $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ (Femtometer).

ii. Ist der Stab jemals komplett innerhalb der Scheune, d.h. mit Vorder- und Hintertür gleichzeitig geschlossen? Zeichnen Sie jeweils ein Minkowski-Diagramm, das den Vorgang aus der Sicht des Athleten und aus der Sicht des Freundes darstellt.

4. Kräftefreie relativistische Bewegung

Der Impuls eines freien relativistischen Teilchens ist durch $p^i = \gamma m v^i$ gegeben, wobei γ den Lorentz-Faktor bezeichnet, und genügt der Gleichung $dp^i/dt = 0$.

Beweisen Sie, dass diese Aussage äquivalent zum newtonschen Resultat $dv^i/dt = 0$ ist.

*5. Zwillingsparadoxon

Astronautin Leia hat einen Zwillingsbruder Luke. Während Luke auf Coruscant zurückbleibt, fliegt Leia nach Dagobah, das 3,25 Lichtjahre entfernt ist. Nach einer einjährigen Jedi-Ausbildung kehrt sie zurück. Ihr X-Wing erreicht eine Geschwindigkeit von $0,65c$. Aus Lukes Sicht ist Leia die ganze Zeit in Bewegung, während Luke auf Coruscant ruht. Laut Luke sollte daher Leia bei ihrer Rückkehr jünger sein als Luke. Aus Leias Sicht bewegt sich jedoch Luke mit Coruscant von ihr fort, während Leia in ihrem X-Wing ruht. Leia behauptet daher, dass Luke am Ende jünger sein sollte. Welcher der beiden Zwillinge ist nun wirklich älter, wenn Leia nach Coruscant zurückkehrt?

i. Stellen Sie den Verlauf der Reise aus Lukes Sicht dar. Zeichnen Sie hierfür ein Minkowski-Diagramm.

ii. Stellen Sie nun den Verlauf der Reise aus Leias Sicht dar. Zeichnen Sie auch hierfür ein Minkowski-Diagramm.

Hint: Nehmen Sie zur Einfachheit an, dass alle Beschleunigungsphasen beliebig kurz sind.