Übung Nr.15: Probeklausur

In der echten Klausur werden Sie ca. 2,5 Stunden haben und über keine Hilfsmittel verfügen.
(Dazu werden die Wissensfragen Teil der „normalen“ Aufgaben sein.)

1. Wissensfragen

i. Spezielle Relativitätstheorie

a) Wie lautet die Transformation der Raumzeitkoordinaten für einen Lorentz-Boost in z-Richtung? Definieren Sie die dabei auftretenden Größen.

b) Ein Teilchen mit Masse m bewege sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$. Geben Sie die Koordinaten p^μ dessen Viererimpulses sowie das Lorentz-Quadrat (Definition?) des letzteren an.

c) Wie ist das Viererpotential des elektromagnetischen Feldes definiert? Wie kann der zugehörige Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ dadurch ausgedrückt werden?

ii. Wellenmechanik

a) Geben Sie die zeitabhängige Schrödinger-Wellengleichung an.

b) Was nennt man „stationäre Schrödinger-Gleichung“? Was bestimmt man mit deren Hilfe?

c) Wie erhält man, ausgehend von einer Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung, eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung?

iii. Harmonischer Oszillator

Geben Sie das Energiespektrum des eindimensionalen harmonischen Oszillators ($V(\hat{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$) an.

iv. Spin-$\frac{1}{2}$-System

Die z-Komponente des Spins wird an einem Ensemble von „nicht-präparierten“ Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen gemessen: welche Messwerte findet man? mit welcher Häufigkeit treten sie auf?

v. Allgemeiner Formalismus der Quantenmechanik

a) Wie ist der Zeitentwicklungsoperator definiert? Welcher Gleichung genügt er?

b) Geben Sie den Kommutator von Komponenten $\hat{x}_i$ und $\hat{p}_j$ der Orts- und Impulsoperatoren an.

2. Teilchenzerfall

Ein ruhender Atomkern mit Masse $M = 5m$ zerplatze in drei gleiche Teile (je Masse m), deren 3-Impuls-Beträge $|\vec{p}_i|$ auch gleich sind. Geben Sie $|\vec{p}_i|$ an und skizzieren Sie die drei 3-Impulse.

3. Bewegung eines Teilchens in einer Raumdimension

Eine freie Teilchenwelle $A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ laufe von $x = -\infty$ kommend gegen das Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x > 0 \\ \dfrac{\hbar^2 v_0}{2m}\delta(x + x_0) & \text{für } x \leq 0, \end{cases} \tag{1}$$

wobei $x_0 > 0$, $v_0 > 0$, und m die Teilchenmasse ist.

i. Was sind passende Ansätze für die Wellenfunktion $\psi(x)$ in den Bereichen I ($x < -x_0$) und II ($-x_0 < x \leq 0$)? Geben Sie die aus der Schrödinger-Gleichung folgenden Anschlussbedingungen bei $x = 0$ und $x = -x_0$ an.

ii. Ein Teil der einlaufenden Welle wird im Bereich I reflektiert. Definieren Sie und bestimmen Sie den entsprechenden Reflexionskoeffizienten R.

4. Addition und Kopplung von Drehimpulsen

Seien $\hat{\vec{J}}^{(1)}$ und $\hat{\vec{J}}^{(2)}$ die Spin-Operatoren von Teilchen mit den jeweiligen Spins $j_1 = 1$ und $j_2 = \frac{3}{2}$. Die anderen Freiheitsgrade (Bewegungszustand. . .) der Teilchen werden ignoriert.

i. Sei $\hat{\vec{J}} \equiv \hat{\vec{J}}^{(1)} + \hat{\vec{J}}^{(2)}$ der Gesamtspin-Operator des aus den zwei Teilchen bestehenden Systems. Was sind die Eigenwerte von $\hat{\vec{J}}^2$?

ii. Der Hamilton-Operator des Systems sei $\hat{H} = g\hat{\vec{J}}^{(1)} \cdot \hat{\vec{J}}^{(2)}$ mit einer reellen Konstante g. Bestimmen Sie die zugehörigen Energieeigenwerte und geben Sie den Entartungsgrad der verschiedenen Energieniveaus an.

5. Stationäre Störungsrechnung

Die ungestörten, normierten Wellenfunktionen für ein Teilchen im eindimensionalen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < a \\ \infty & \text{außerhalb} \end{cases} \tag{2}$$

sind $\varphi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{a}} \sin \dfrac{n\pi x}{a}$ für $0 < x < a$ und Null außerhalb.

i. Das System werde dadurch gestört, dass der Boden des Topfs um einen Betrag λV_0 angehoben wird, $\lambda \ll 1$. Bestimmen Sie die Korrekturen erster Ordnung (in λ) für die Energien.

ii. Jetzt wird nur der halbe Boden angehoben:

$$V(x) = \begin{cases} \lambda V_0 & \text{für } 0 < x < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{a}{2} < x < a \end{cases} \tag{3}$$

Geben Sie die Energiekorrektur erster Ordnung an.

Hinweis: $\dfrac{\partial}{\partial x}(x - \sin x \cos x) = 2 \sin^2 x$.